Agrégation 2024

Développements

Document intégralement écrit par Hugo Delaunay.
Visitez `agreg.skyost.eu` pour plus de ressources et d'informations.

Une coquille ? Une correction à apporter ? Rendez-vous sur le dépôt Github "`Skyost/Agregation`" ou contactez-moi via mon site web personnel `skyost.eu`.

Table des matières

1 Caractérisation réelle de la fonction Γ

On montre que la fonction Γ *d'Euler est la seule fonction log-convexe sur* $\mathbb{R}^+$ *prenant la valeur* 1 *en* 1 *et vérifiant* $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ *pour tout* $x > 0$.

[ROM19-1] p. 364

Lemme 1. La fonction Γ définie pour tout $x > 0$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ vérifie :

(i) $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(ii) $\Gamma(1) = 1$.

(iii) Γ est log-convexe sur $\mathbb{R}_*^+$.

Démonstration. (i) Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. Alors :

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-e^{-t}t^x\right]_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= x\Gamma(x)\end{aligned}$$

(ii) Comme $t \mapsto e^{-t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$ est la densité de probabilité d'une loi exponentielle de paramètre 1, on a

$$\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t}_{=\Gamma(1)} = 1$$

(iii) Soient $x, y \in \mathbb{R}_*^+$ et $\lambda \in]0,1[$. On applique l'inégalité de Hölder en posant $\lambda = \frac{1}{p}$ et $1-\lambda = \frac{1}{q}$:

$$\begin{aligned}\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\lambda x}t^{(1-\lambda)y}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} (e^{-t}t^{x-1})^{\frac{1}{p}}(e^{-t}t^{y-1})^{\frac{1}{q}}\,\mathrm{d}t \\ &\leq \left(\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{y-1}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \Gamma(x)^{\lambda}\Gamma(y)^{1-\lambda}\end{aligned}$$

Donc $\ln\circ\Gamma$ vérifie bien l'inégalité de convexité sur $\mathbb{R}_*^+$ et ainsi, Γ est log-convexe.

□

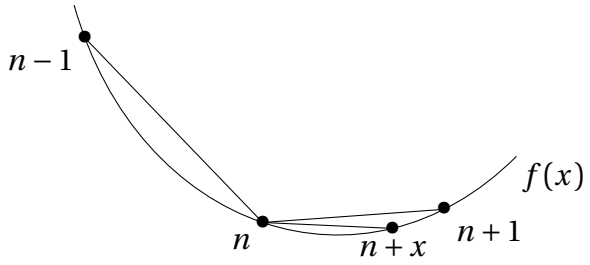
Théorème 2 (Bohr-Mollerup)**.** Soit $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}^+$ vérifiant le Point (i), le Point (ii) et le Point (iii) du Lemme 1. Alors $f = \Gamma$.

Démonstration. Par récurrence, on a d'après le Point (i) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0,1], f(x+n) = (x+n-1)\dots(x+1)xf(x) \qquad (*)$$

Donc les valeurs prises par f sur $\mathbb{R}_*^+$ sont entièrement déterminées par ses valeurs prises sur $]0,1]$. Ainsi, pour démontrer le théorème, il suffit de vérifier $\forall x \in]0,1]$, $f(x) = \Gamma(x)$.

Soient donc $x \in]0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$; on applique le lemme des trois pentes à la fonction convexe $\ln \circ f$ (d'après le Point (iii) appliqué aux points $n-1$, n, $n+x$ et $n+1$:



$$\frac{(\ln\circ f)(n)-(\ln\circ f)(n-1)}{n-(n-1)} \leq \frac{(\ln\circ f)(n+x)-(\ln\circ f)(n)}{n+x-n} \leq \frac{(\ln\circ f)(n+1)-(\ln\circ f)(n)}{n+1-n}$$

Mais, d'après $(*)$ et le Point (ii), on a $f(n) = (n-1)!$. D'où :

$$\begin{aligned} &\ln(n-1) \leq \frac{(\ln\circ f)(n+x)-\ln((n-1)!)}{x} \leq \ln(n) \\ \Longrightarrow\ &\ln((n-1)^x) \leq (\ln\circ f)(n+x)-\ln((n-1)!) \leq \ln(n^x) \\ \Longrightarrow\ &\ln((n-1)^x(n-1)!) \leq (\ln\circ f)(n+x) \leq \ln(n^x(n-1)!) \end{aligned}$$

Par croissance de la fonction ln, cela donne :

$$(n-1)^x(n-1)! \leq f(n+x) \leq n^x(n-1)!$$

Et en appliquant $(*)$, on obtient :

$$\frac{(n-1)^x(n-1)!}{(x+n-1)\dots(x+1)x} \leq f(x) \leq \frac{n^x(n-1)!}{(x+n-1)\dots(x+1)}$$

En ne considérant que la première inégalité, on peut remplacer n par $n+1$ (car les deux inégalités sont vraies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) :

$$\frac{n^x n!}{(x+n)\dots(x+1)x} \leq f(x)$$

Or, $\frac{n^x(n-1)!}{(x+n-1)\dots(x+1)} = \frac{n^x n!}{(x+n)\dots(x+1)x}\frac{x+n}{n}$, donc :

$$\begin{aligned} &\frac{n^x n!}{(x+n)\dots(x+1)x} \leq f(x) \leq \frac{n^x n!}{(x+n)\dots(x+1)x}\frac{x+n}{n} \\ \Longrightarrow\ &f(x)\frac{n}{x+n} \leq \frac{n^x n!}{(x+n)\dots(x+1)x} \leq f(x) \\ \Longrightarrow\ &f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{(x+n)\dots(x+1)x} \end{aligned}$$

en faisant $n \longrightarrow +\infty$ dans la deuxième inégalité. Comme Γ vérifie le Point (i), le Point (ii), et le

Point (iii) ; le raisonnement précédent est a fortiori vrai aussi pour Γ. Donc

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{(x+n)\dots(x+1)x} = f(x)$$

ie. f et Γ coïncident bien sur $]0,1]$. □

Remarque 3. À la fin de la preuve, on obtient une formule due à Gauss :

$$\forall x \in]0,1], \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{(x+n)\dots(x+1)x}$$

que l'on peut aisément étendre à $\mathbb{R}_*^+$ entier.

2 Connexité des valeurs d'adhérence d'une suite dans un compact

On montre que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite d'un espace métrique compact est connexe en raisonnant par l'absurde, puis on utilise ce résultat pour démontrer le lemme des grenouilles.

Soit (E,d) un espace métrique.

[I-P] p. 116

Théorème 1. On suppose E compact. Soit (u_n) une suite de E telle que $d(u_n,u_{n-1}) \longrightarrow 0$. Alors l'ensemble Γ des valeurs d'adhérence de (u_n) est connexe.

Démonstration. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $A_p = \{u_n \mid n \geq p\}$. On a $\Gamma = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \overline{A_p}$. Γ est fermé (en tant qu'intersection de fermés) dans E qui est compact, donc Γ est compact.Supposons que Γ soit non connexe ; on peut alors écrire $\Gamma = A \sqcup B$, où A et B sont deux fermés disjoints de Γ. Comme Γ est compact, A et B le sont aussi. Notons $\alpha = d(A,B) > 0$ (car $A \cap B = \emptyset$). Posons :

$$A' = \left\{x \in E \mid d(x,A) < \frac{\alpha}{3}\right\} \text{ et } B' = \left\{x \in E \mid d(x,B) < \frac{\alpha}{3}\right\}$$

A' et B' sont ouverts (en tant qu'images réciproques d'ouverts par des application continues), donc $K = E \setminus (A' \cup B')$ est fermé dans E, donc compact.

Montrons que (u_n) admet une valeur d'adhérence dans K, ce qui serait absurde car $\Gamma \cap K = \emptyset$. Comme $\lim_{n\to+\infty} d(u_n,u_{n-1}) = 0$,

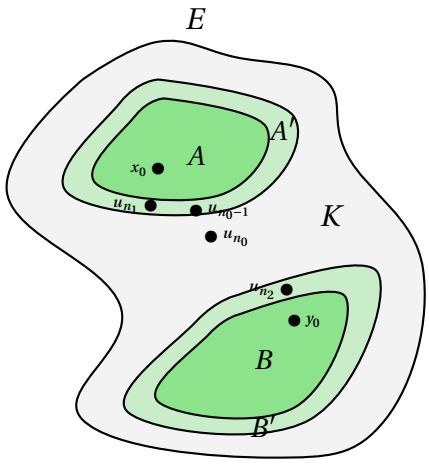
$$\exists N_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N_0,\ d(u_n,u_{n-1}) < \frac{\alpha}{3} \qquad (*)$$

Soit $N \geq N_0$.

— Soit $x_0 \in A$. Comme x_0 est valeur d'adhérence de (u_n), $\exists n_1 > N$ tel que $d(x_0,u_{n_1}) < \frac{\alpha}{3}$. Donc $u_{n_1} \in A'$.

— Soit $y_0 \in B$. De même, $\exists n_2 > n_1$ tel que $d(y_0,u_{n_2}) < \frac{\alpha}{3}$. Donc $u_{n_2} \in B'$.

Soit maintenant n_0 le premier entier supérieur à n_1 tel que $u_{n_0} \notin A'$ (un tel entier existe car $u_{n_2} \in A'$). On a alors $u_{n_0-1} \in A'$.



D'après $(*)$, en appliquant l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} d(u_{n_0}, B) &\geq d(u_{n_0-1}, B) - d(u_{n_0-1}, u_{n_0}) \\ &\geq d(A, B) - d(u_{n_0-1}, A) - d(u_{n_0-1}, u_{n_0}) \\ &> \frac{\alpha}{3} \end{aligned}$$

ce qui prouve que $u_{n_0} \notin B'$. Comme $u_{n_0} \notin A'$, on a $u_{n_0} \in K$. On vient de montrer que,

$$\forall N \geq N_0, \exists n_0 \geq N \text{ tel que } u_{n_0} \in K$$

On peut créer comme cela une sous-suite de (u_n) dans K. Or K est compact, donc (u_n) admet une valeur d'adhérence dans K. □

Application 2 (Lemme de la grenouille)**.** Soient $f : [0,1] \to [0,1]$ continue et (x_n) une suite de $[0,1]$ telle que

$$\begin{cases} x_0 \in [0,1] \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

Alors (x_n) converge si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n = 0$.

Démonstration. Le sens direct est évident. Montrons la réciproque. On suppose donc que $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n = 0$ et on note Γ l'ensemble des valeurs d'adhérence de (x_n). Γ est non vide (car (x_n) est bornée, donc admet une valeur d'adhérence par le théorème de Bolzano-Weierstrass) et est un connexe de $\mathbb{R}$ (par le Théorème 1), donc Γ est un intervalle non vide.

Soit $a \in \Gamma$. Il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante (on dit que φ est une extractrice) telle que $x_{\varphi(n)} \longrightarrow a$. Mais alors,

$$x_{\varphi(n)+1} - x_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)} \longrightarrow f(a) - a$$

et par hypothèse, le membre de gauche converge vers 0. Donc $f(a) - a = 0$ ie. a est un point fixe de f.

Supposons par l'absurde que (x_n) diverge. Alors Γ n'est pas un singleton, donc est un intervalle

d'intérieur non vide : on peut trouver $c \in \Gamma$ et $h > 0$ tel que $[c-h, c+h] \subseteq \Gamma$.

Or, $c \in \Gamma$, donc

$$\exists N \geq 0 \text{ tel que } |x_N - c| \leq \frac{h}{2} \implies x_N \in \Gamma$$

et en particulier, x_N est un point fixe de f. Ainsi, $x_{n+1} = f(x_n) = x_n$ pour tout $n \geq N$: absurde. □

3 Critère d'Eisenstein

Ici, nous démontrons le célèbre critère d'Eisenstein que l'on utilise énormément en pratique pour montrer qu'un polynôme est irréductible.

Soit A un anneau commutatif et unitaire.

Notation 1. Soit $P \in A[X]$. On note $\gamma(P)$ le contenu du polynôme P.

Lemme 2. Soit $p \in A$ tel que (p) est premier. Alors $A/(p)$ est intègre. [ULM18] p. 32

Démonstration. Soient $\overline{a}, \overline{b} \in A/(p)$. On suppose $\overline{a}\overline{b} = 0$. Comme $\overline{a}\overline{b} = \overline{ab}$, on a $ab \in (p)$. Donc par hypothèse,

$$\begin{aligned} & a \in (p) \text{ ou } b \in (p) \\ \Longrightarrow\ & \overline{a} = 0 \text{ ou } \overline{b} = 0 \end{aligned}$$

et ainsi $A/(p)$ est bien intègre. □

Lemme 3. Si A est intègre, alors $A[X]$ l'est aussi. p. 22

Démonstration. Soient $P, Q \in A[X]$ non nuls, de degrés respectifs $n \geq 1$ et $m \geq 1$ que l'on écrit $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $Q = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j$. Alors, le coefficient de X^{n+m} dans le produit PQ est $a_n b_m$. Comme $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$ et A est intègre, ce coefficient est non nul. Donc en particulier, le produit PQ est non nul. □

Lemme 4. On suppose A factoriel. Soit $a \in A$ irréductible. Alors (a) est premier. p. 64

Démonstration. On suppose que $a \mid bc$ avec $b, c \in A$. Alors, il existe $d \in A$ tel que

$$ad = bc \qquad (*)$$

Si b est inversible, alors $a \mid c$. De même, si c est inversible, alors $a \mid b$. Supposons donc que b et c ne sont pas inversibles. Comme a est irréductible, on en déduit que d est un élément non nul et non inversible de A. Il existe donc des décompositions en irréductibles

$$b = \beta_1 \dots \beta_n,\ c = \gamma_1 \dots \gamma_m \text{ et } d = \delta_1 \dots \delta_k$$

avec $n, m, k \in \mathbb{N}^*$. Par conséquent, en injectant dans $(*)$:

$$a\delta_1 \dots \delta_k = \beta_1 \dots \beta_n \gamma_1 \dots \gamma_m$$

Comme la factorisation en irréductibles est unique à l'ordre près, il existe β_i ou γ_j qui est associé à a. Si bien que a divise b ou c ; c'est ce que l'on voulait démontrer. □

[GOZ] p. 10

Lemme 5 (Gauss)**.** On suppose A factoriel. Alors :

(i) Le produit de deux polynômes primitifs est primitif.

(ii) $\forall P, Q \in A[X] \setminus \{0\}, \gamma(PQ) = \gamma(P)\gamma(Q)$.

Démonstration. (i) Soient $P, Q \in A[X]$ tels que $\gamma(P) = \gamma(Q) = 1$. Supposons $\gamma(PQ) \neq 1$. Alors, il existe $p \in A$ irréductible tel que p divise tous les coefficients de PQ. Donc, dans $A/(p)$, $\overline{PQ} = \overline{P}\,\overline{Q} = 0$.

Mais, par le Lemme 4, (p) est premier. Donc par le Lemme 2 $A/(p)$ est intègre, et en particulier, $A/(p)[X]$ l'est aussi par le Lemme 3. Ainsi, $\overline{P} = 0$ ou $\overline{Q} = 0$: absurde.

(ii) En factorisant, on écrit $P = \gamma(P)R$ et $Q = \gamma(Q)S$ où $R, S \in A[X]$ avec $\gamma(R) = \gamma(S) = 1$. D'où $PQ = \gamma(P)\gamma(Q)RS$ avec $\gamma(RS) = 1$ par le Point (i). Ainsi, $\gamma(PQ) = \gamma(P)\gamma(Q)$.

□

Théorème 6 (Critère d'Eisenstein)**.** Soient $\mathbb{K}$ le corps des fractions de A et $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in A[X]$ de degré $n \geq 1$. On suppose que A est factoriel et qu'il existe $p \in A$ irréductible tel que :

(i) $p \mid a_i$, $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$.

(ii) $p \nmid a_n$.

(iii) $p^2 \nmid a_0$.

Alors P est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration. Par l'absurde, on suppose $P = UV$ avec $U, V \in \mathbb{K}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1. Soit a un multiple commun à tous les dénominateurs des coefficients non nuls de U et V. On a

$$a^2 P = \underbrace{\underbrace{aU}_{=U_1}}_{\in A[X]} \underbrace{\underbrace{aV}_{=V_1}}_{\in A[X]}$$

On applique le Lemme 5 pour obtenir :

$$a^2\gamma(P) = \gamma(U_1)\gamma(V_1) \qquad (*)$$

En factorisant, on écrit $U_1 = \gamma(U_1)U_2$ et $V_1 = \gamma(V_1)V_2$ avec $U_2, V_2 \in A[X]$. Il vient :

$$a^2 P = \gamma(U_1)\gamma(V_1)U_2V_2 \overset{(*)}{=} a^2\gamma(P)U_2V_2$$

Et comme $a \in A \setminus \{0\}$ et que A est intègre, on a $P = \gamma(P)U_2V_2$ avec $U_2, V_2 \in A[X]$ de degré supérieur ou égal à 1.

On pose $U_2 = \sum_{i=0}^{r} b_i X^i$ et $V_2 = \sum_{j=0}^{s} c_j X^j$ avec $b_r c_s = a_n \neq 0$ par définition de P. Dans $A/(p)$, on a

$$\underbrace{\overline{P}}_{=\overline{a_n}X^n} = \overline{U_2V_2} = \overline{U_2}\,\overline{V_2}$$

et en particulier, le terme de degré 0, $\overline{b_0 c_0} = \overline{b_0}\,\overline{c_0}$ est nul. Mais, p est irréductible et A est factoriel, donc au vu du Lemme 4, (p) est premier et $A/(p)$ est intègre par le Lemme 2. Donc par le Lemme 3, $A/(p)[X]$ est aussi intègre. D'où $\overline{b_0} = 0$ ou $\overline{c_0} = 0$ (mais pas les deux car sinon $p^2 \mid b_0 c_0 = a_0$, ce qui serait en contradiction avec le Point (iii)).

On suppose donc $\overline{b_0} = 0$ et $\overline{c_0} \neq 0$. Si on avait $\forall i \in [\![0, r]\!]$, $\overline{b_i} = 0$, on aurait en particulier $\overline{b_r} = 0$, et donc $\overline{b_r}\,\overline{c_s} = \overline{a_n} = 0$ (exclu par le Point (ii)). Donc,

$$\exists i \in [\![0, r-1]\!] \text{ tel que } \overline{b_0} = \cdots = \overline{b_i} = 0 \text{ et } b_{i+1} \neq 0$$

Ainsi,

$$\overline{a_{i+1}} = \sum_{k=0}^{i+1} \overline{b_k}\,\overline{c_{i+1-k}} = \underbrace{\overline{b_{i+1}}}_{\neq 0}\,\underbrace{\overline{c_0}}_{\neq 0} \neq 0$$

ce qui est absurde au vu du Point (i) car $i \in [\![0, r-1]\!]$ avec $r - 1 \leq n - 1$. □

Application 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe des polynômes irréductibles de degré n sur $\mathbb{Z}$.

[PER] p. 67

Démonstration. On applique le Théorème 6 au polynôme $P = X^n - 2$ avec le premier $p = 2$ qui nous donne l'irréductibilité du polynôme sur $\mathbb{Q}$. Reste à montrer qu'il est irréductible sur $\mathbb{Z}$.

Or, en supposant P réductible sur $\mathbb{Z}$, on peut écrire $P = QR$ avec $Q, R \in \mathbb{Z}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 car P est primitif. Mais à fortiori, $Q, R \in \mathbb{Q}[X]$ et ne sont pas inversibles donc P est réductible sur $\mathbb{Q}$: absurde. □

4 Décomposition de Dunford

On démontre l'existence et l'unicité de la décomposition de Dunford pour tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif $\mathbb{K}$.

[GOU21] p. 203

Théorème 1 (Décomposition de Dunford)**.** Soit $f \in E$ un endomorphisme tel que son polynôme minimal π_f soit scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple d'endomorphismes (d, n) tel que :

- $f = d + n$.
- d est diagonalisable et n est nilpotent.
- $d \circ n = n \circ d$.

Démonstration. On écrit $\pi_f = (-1)^n \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et pour tout i, on note $N_i = \mathrm{Ker}((f - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{\alpha_i})$ le i-ième sous-espace caractéristique de f.

Construction : Comme $E = N_1 \oplus \cdots \oplus N_s$, il suffit de définir d et n sur chaque N_i. On les définit pour tout i et pour tout $x \in N_i$ comme tels :

- $d(x) = \lambda_i x \implies d_{|N_i} = \lambda_i \mathrm{id}_{N_i}$
- $n(x) = f(x) - \lambda_i x = f(x) - d(x) \implies n = f - d$.

Vérification :

- Les restrictions de d et n à N_i sont bien des endomorphismes car les espaces N_i sont stables par f et par d (cf. définition de d), donc aussi par $n = f - d$.
- d est diagonalisable et pour tout i, $n_{|N_i}^{\alpha_i} = 0$ (car $\forall x \in N_i$, $(f - \lambda_i)^{\alpha_i}(x) = 0$ par définition de N_i). On pose donc $\alpha = \max_i\{\alpha_i\}$ et on a $n_{|N_i}^{\alpha} = 0$ pour tout i, donc $n^{\alpha} = 0$ par somme directe. Ainsi, n est nilpotent.
- Pour tout i, on a $d_{|N_i} = \lambda_i \mathrm{id}_E$, donc $n_{|N_i} \circ d_{|N_i} = d_{|N_i} \circ n_{|N_i}$ i.e. d et n commutent sur chaque N_i donc sur E tout entier.

Unicité : Soit (d', n') un autre couple d'endomorphismes de E vérifiant les hypothèses. On remarque d'abord que d' et f commutent (car d' commute avec d' et n', donc avec $f = d' + n'$ aussi). Pour tout i, N_i est stable par d' (car $\forall x \in N_i$, $(f - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{\alpha_i}(d'(x)) = d' \circ (f - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{\alpha_i}(x) = 0$). Comme $d_{|N_i} = \lambda_i \mathrm{id}_{N_i}$, on en déduit que $d \circ d' = d' \circ d$ sur N_i. Donc c'est également vrai sur E tout entier. Ainsi, d et d' sont diagonalisables dans une même base, donc $d - d'$ est disagonalisable.

D'autre part, comme $n = f - d$, $n' = f - d'$ et que d et d' commutent, n et n' commutent. Si on choisit p et q tels que $n^p = n'^q = 0$, alors :

$$(n - n')^{p+q} = \sum_{i=0}^{p+q} \binom{p+q}{i} n^i (-1)^{p+q-i} n'^{p+q-i} = 0$$

(dans chaque terme de la somme, soit $i \geq p$, soit $p + q - i \geq q$). Donc $n - n' = d' - d$ est nilpotent. Or nous avions montré que $d' - d$ est diagonalisable, donc $d' - d = 0$. Finalement, on a $d = d'$ et $n = n'$. □

Remarque 2. On peut démontrer que les endomorphismes d et n sont des polynômes en f.

5 Décomposition polaire

On montre que toute matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique $M = OS$ avec $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, et que l'application $(O,S) \mapsto M$ est un homéomorphisme.

Lemme 1. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

Démonstration. Par le théorème spectral, on peut écrire $S = {}^tP\,\mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)P$ avec $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Si on suppose $\lambda_1,\dots,\lambda_n > 0$, on a $\forall x \neq 0$,

$$ {}^txSx = {}^t(Px)\,\mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)(Px) > 0 \text{ car } \mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

d'où le résultat.

Réciproquement, on suppose $\forall x \neq 0$, ${}^txSx > 0$. Avec $x = {}^tPe_1$ (où e_1 désigne le vecteur dont la première coordonnée vaut 1 et les autres sont nulles),

$$ {}^txSx = {}^t(Px)D(Px) = {}^te_1De_1 = \lambda_1 > 0$$

Et on peut faire de même pour montrer que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i > 0$. □

Lemme 2. $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Démonstration. Pour la première assertion, il suffit de constater que

$$ \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM = M\} \cap \left(\bigcap_{x\in\mathbb{R}^n} \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^txMx \geq 0\} \right)$$

qui est une intersection de fermés (par image réciproque). Maintenant, si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors M est diagonalisable avec des valeurs propres positives ou nulles (par le théorème spectral). Mais comme $\det(M) \neq 0$, toutes les valeurs propres de M sont strictement positives. Donc par le Lemme 1, $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. □

Théorème 3 (Décomposition polaire)**.** L'application

[C-G] p. 376

$$ \mu : \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \to & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (O,S) & \mapsto & OS \end{array}$$

est un homéomorphisme.

Démonstration. Montrer qu'une application est un homéomorphisme se fait en 4 étapes : on montre qu'elle est continue, injective, surjective, et que la réciproque est elle aussi continue.

— L'application est bien définie et continue : Si $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $OS \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. De plus, μ est continue en tant que restriction de la multiplication matricielle.

— L'application est surjective : Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Si $x \neq 0$, on a

$$ {}^t x({}^t MM)x = {}^t(Mx)(Mx) = \|Mx\|_2^2 > 0 $$

En particulier, ${}^t MM \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Par le théorème spectral, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ tels que ${}^t MM = P\,\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P^{-1}$. On pose alors

$$ D = \mathrm{Diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\right) \text{ et } S = PDP^{-1} $$

de sorte que $S^2 = {}^t MM$. Mais de plus,

$$ {}^t S = {}^t P^{-1}\,{}^t D\,{}^t P = S \implies S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) $$

et par le Lemme 1,

$$ \forall i \in [\![1, n]\!],\ \sqrt{\lambda_i} > 0 \implies S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) $$

On pose donc $O = MS^{-1}$ (ie. $M = OS$), et on a

$$ {}^t OO = {}^t(MS^{-1})MS^{-1} = {}^t S^{-1}\,{}^t MMS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n \implies O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) $$

Donc $\mu(O, S) = M$ et μ est surjective.

— L'application est injective : Soit $M = OS \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (avec O et S comme précédemment). Soit $M = O'S'$ une autre décomposition polaire de M. Alors il vient,

$$ S^2 = {}^t MM = {}^t(O'S')O'S' = {}^t S'\,{}^t O'O'S' = S'^2 $$

Soit Q un polynôme tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$ (les polynômes d'interpolation de Lagrange conviennent parfaitement). Alors,

$$ S = PD\,{}^t P = PQ\left(D^2\right){}^t P = Q\left(PD^2\,{}^t P\right) = Q\left({}^t MM\right) = Q\left(S^2\right) = Q\left(S'^2\right) $$

Mais S' commute avec S'^2, donc avec $S = Q\left(S'^2\right)$. En particulier, S et S' sont codiagonalisables, il existe $P_0 \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mu_1, \dots, \mu_n, \mu'_1, \dots, \mu'_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$ S = P_0\,\mathrm{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)P_0^{-1} \text{ et } S' = P_0\,\mathrm{Diag}\left(\mu'_1, \dots, \mu'_n\right)P_0^{-1} $$

d'où :

$$ \begin{aligned} S^2 = S'^2 &\implies P_0\,\mathrm{Diag}\left(\mu_1^2, \dots, \mu_n^2\right)P_0^{-1} = P_0\,\mathrm{Diag}\left(\mu_1'^2, \dots, \mu_n'^2\right)P_0^{-1} \\ &\implies \mu_i^2 = \mu_i'^2 \qquad \forall i \in [\![1, n]\!] \\ &\implies \mu_i = \mu'_i \qquad \forall i \in [\![1, n]\!] \text{ car } \forall i \in [\![1, n]\!],\ \mu_i > 0 \\ &\implies S = S' \end{aligned} $$

Ainsi, $O = MS^{-1} = MS'^{-1} = O'$. Donc μ est injective.

— L'application inverse est continue : Soit $(M_p) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Il

s'agit de montrer que la suite $\left(\mu^{-1}\left(M_p\right)\right) = (O_p, S_p)$ converge vers $\mu^{-1}(M) = (O, S)$. Comme $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite extraite $(O_{\varphi(p)})$ converge vers une valeur d'adhérence $\overline{O} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, la suite $(S_{\varphi(p)})$ converge vers $\overline{S} = \overline{O}^{-1} M$.

Mais, $\overline{S} = \overline{O}^{-1} M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \cap \overline{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$. Donc par le Lemme 1,

$$\overline{S} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$$

et par le Lemme 2,

$$\overline{S} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

Par unicité de la décomposition polaire, on a $M = \overline{OS}$, d'où $\overline{O} = O$ et $\overline{S} = S$.

□

Remarque 4. La preuve vaut encore dans le cas complexe (pour le groupe unitaire et les matrices hermitiennes).

6 Densité des polynômes orthogonaux

On montre que la famille des polynômes orthogonaux associée à une fonction poids ρ vérifiant certaines hypothèses forme une base hilbertienne de $L_2(I,\rho)$ (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$).

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. On considère (P_n) la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ sur I. **[BMP]** p. 140

Lemme 1. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_n : x \mapsto x^n \in L_1(I,\rho)$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_n \in L_2(I,\rho)$. En particulier, l'algorithme de Gram-Schmidt a bien du sens et (P_n) est bien définie.

Démonstration. On a $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\int_I |x^n|^2 \rho(x)\,\mathrm{d}x = \int_I |x^{2n}|\rho(x)\,\mathrm{d}x = \|g_{2n}\|_1 < +\infty$$

□

Théorème 2. On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que

$$\int_I e^{a|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$$

alors (P_n) est une base hilbertienne de $L_2(I,\rho)$ pour la norme $\|.\|_2$.

Démonstration. Soit $f \in \mathrm{Vect}(g_n)^\perp = \mathrm{Vect}(P_n)^\perp$. On définit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \begin{cases} f(x)\rho(x) & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrons que $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$. Remarquons tout d'abord que $\forall t \geq 0$, $t \leq \frac{1+t^2}{2}$. Ainsi, on a

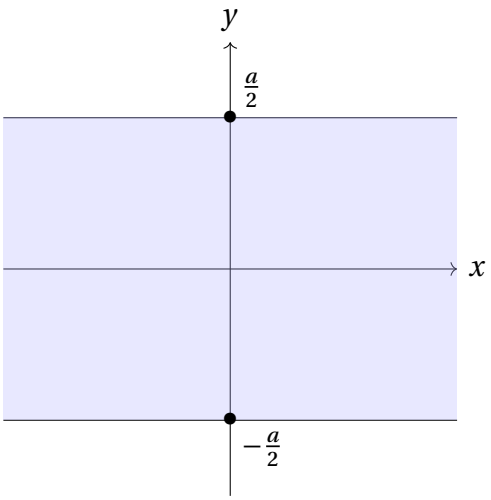
$$\forall x \in I, \quad |f(x)|\rho(x) \leq \frac{(1+|f(x)|)^2}{2}\rho(x)$$

Comme ρ et ρf^2 sont intégrables sur I, on en déduit que $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$. On peut donc considérer sa transformée de Fourier

$$\widehat{\varphi} : \xi \mapsto \int_I f(x)e^{-i\xi x}\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

Montrons que $\widehat{\varphi}$ se prolonge en une fonction F holomorphe sur

$$B_a = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}(z)| < \frac{a}{2} \right\}$$



Définissons à présent $g : (z,x) \mapsto e^{-izx} f(x)\rho(x)$. Pour $z \in B_a$, on a

$$\int_I |g(z,x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_I e^{\frac{a|x|}{2}} |f(x)|\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour $\|.\|_2$, on obtient de plus

$$\int_I e^{\frac{a|x|}{2}} |f(x)|\rho(x)\,\mathrm{d}x \leq \left(\int_I e^{a|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I |f(x)|^2\rho(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \qquad (*)$$

On définit la fonction F par

$$\forall z \in B_a, \quad F(z) = \int_I e^{-izx} f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x = \int_I g(z,x)\,\mathrm{d}x$$

L'inégalité $(*)$ montre que cette fonction est bien définie. De plus :

— $\forall z \in B_a$, $x \mapsto g(z,x)$ est mesurable.

— pp. en $x \in I$, $z \mapsto g(z,x)$ est holomorphe.

— $\forall z \in B_a$, $\forall x \in I$,

$$|g(z,x)| \leq h(x) = e^{\frac{a|x|}{2}} |f(x)|\rho(x)$$

et l'inégalité $(*)$ montre que $h \in L_1(I)$.

Donc par le théorème d'holomorphie sous l'intégrale, la fonction F est holomorphe sur B_a, et coïncide sur $\mathbb{R}$ avec $\widehat{\varphi}$.Ce théorème nous dit de plus que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in B_a, F^{(n)}(z) = (-i)^n \int_I x^n e^{-izx} f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

Ce qui donne, une fois évalué en 0 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, F^{(n)}(0) = (-i)^n \int_I x^n f(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x = (-i)^n \langle g_n, f\rangle = 0$$

L'unicité du développement en série entière d'une fonction holomorphe montre que $F = 0$ sur un voisinage de 0. Le théorème du prolongement analytique implique alors que $F = 0$ sur le connexe B_a tout entier, et donc en particulier, sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $\widehat{\varphi} = 0$. Comme φ est une fonction

intégrable, l'injectivité de la transformée de Fourier implique que $\varphi = 0$. Comme $\rho(x) > 0$, on en déduit que $f(x) = 0$ pp. en $x \in I$. On vient donc de montrer qu'une fonction orthogonale à tous les polynômes est nulle i.e. $\text{Vect}(g_n)^\perp = \{0\}$.En ajoutant le Lemme 1 à ceci, on a bien que les polynômes orthogonaux forment une base hilbertienne de $L_2(I, \rho)$. □

Contre-exemple 3. On considère, sur $I = \mathbb{R}_*^+$, la fonction poids $\rho : x \mapsto x^{-\ln(x)}$. On pose $\forall x \in I$, $f(x) = \sin(2\pi \ln(x))$. On calcule

$$\begin{aligned}
\langle f, g_n \rangle &= \int_I x^n \sin(2\pi \ln(x)) x^{-\ln(x)} \, \mathrm{d}x \\
&\overset{y=\ln(x)}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{(n+1)y} \sin(2\pi y) e^{-y^2} \, \mathrm{d}y \\
&= e^{\frac{(n+1)^2}{4}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(y-\frac{n+1}{2}\right)^2} \sin(2\pi y) \, \mathrm{d}y \\
&= (-1)^{n+1} e^{\frac{(n+1)^2}{4}} \int_{\mathbb{R}} \sin(2\pi t) e^{-t^2} \, \mathrm{d}t, \text{ avec } t = y - \frac{n+1}{2} \\
&\overset{f \text{ impaire}}{=} 0
\end{aligned}$$

Ainsi, la famille des g_n n'est pas totale. La famille des polynômes orthogonaux associée à ce poids particulier n'est donc pas totale non plus : ce n'est pas une base hilbertienne.

7 Développement asymptotique de la série harmonique

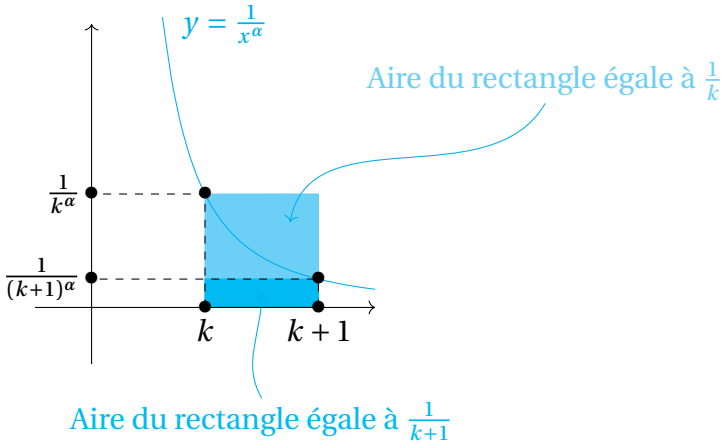
On effectue un développement asymptotique à l'ordre 2 de la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$.

Lemme 1. Soit $\alpha > 1$. Lorsque n tend vers $+\infty$, on a

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

[I-P] p. 380

Démonstration. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}^\alpha$ est décroissante sur $\mathbb{R}_*^+$, nous allons faire une comparaison série / intégrale.



On a

$$\forall k \geq 1,\ \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

D'où :

$$\forall k \geq 2,\ \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

Soit $N \geq 2$. Pour tout $n \in [\![2, N]\!]$,

$$\begin{aligned}
&\int_n^{N+1} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{n-1}^{N} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \\
\iff &\left[\frac{-1}{\alpha-1}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_n^{N+1} \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \left[\frac{-1}{\alpha-1}\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_{n-1}^{N} \\
\iff &\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}}\right) \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^{\alpha-1}}\right)
\end{aligned}$$

La suite $\left(\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^\alpha}\right)$ est donc convergente, car elle est croissante et majorée par $\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}}\right)$. Lorsque N tend vers $+\infty$, on a donc

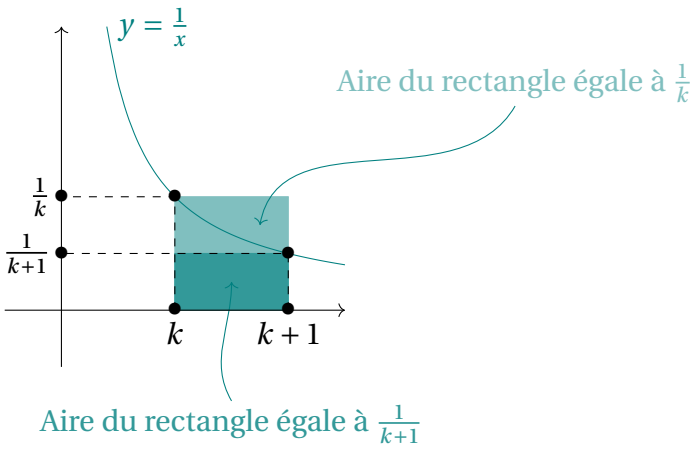
$$\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}}\right)$$

Or, comme $n^{\alpha-1} \sim (n-1)^{\alpha-1}$ quand n tend vers $+\infty$, on en conclut l'équivalent annoncé. □

Théorème 2 (Développement asymptotique de la série harmonique)**.** On note $\forall n \in \mathbb{N}^*, H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Alors, quand n tend vers $+\infty$,

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Démonstration. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_*^+$, cela invite à faire une comparaison série / intégrale.



On a

$$\forall k \geq 1, \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{k}$$

Traitons les deux morceaux séparément.

— $\forall k \geq 1, \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{k}$ par l'inégalité de droite. Donc, en sommant entre 1 et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leq H_n$$

— $\forall k \geq 2, \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ par l'inégalité de gauche avec un changement de variable. Donc, en sommant entre 2 et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(n)$$

et en ajoutant 1 :

$$H_n \leq \ln(n) + 1$$

On peut tout regrouper pour obtenir les inégalités suivantes :

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$$

et donc, quand n tend vers $+\infty$,

$$H_n \sim \ln(n)$$

Pour la suite, on pose pour tout $n \geq 1$, $u_n = H_n - \ln(n)$ et pour tout $n \geq 2$, $v_n = H_{n-1} - \ln(n)$. On a :

— $\forall n \geq 2$, $u_n - v_n = \frac{1}{n} \geq 0$ et converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

— $\forall n \geq 1$,

$$\begin{aligned} u_n - u_{n+1} &= -\frac{1}{n+1} - \ln(n) + \ln(n+1) \\ &= -\frac{1}{n+1} - \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

car $\ln(1+x) \leq x$ pour $x \in]-1, +\infty[$.

— $\forall n \geq 2$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n} + \ln(n) - \ln(n+1) \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, elles convergent donc vers un réel $\gamma \in \mathbb{R}$. Posons maintenant

$$\forall n \geq 1,\ t_n = u_n - \gamma = H_n - \ln(n) - \gamma$$

Nous allons utiliser le lien entre séries et suites : cherchons un équivalente de la suite $(t_n - t_{n-1})$ pour obtenir un équivalent de la somme partielle de la série de terme général $(t_n - t_{n-1})$ qui n'est autre que la suite (t_n). À l'aide du développement limité de $\ln(1+x)$ en 0 on obtient

$$\begin{aligned} t_n - t_{n-1} &= \ln(n-1) - \ln(n) + \frac{1}{n} \\ &= \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \\ &\sim -\frac{1}{2n^2} \end{aligned}$$

D'après le critère de Riemann, la série de terme général $t_k - t_{k-1}$ converge. Le théorème de sommation des équivalents donne l'équivalence des restes. Or, un équivalent du reste de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est donné par le Lemme 1 et vaut $\frac{1}{n}$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} t_k - t_{k-1} = -t_n \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} -\frac{1}{2k^2} \sim -\frac{1}{2n}$$

D'où $t_n \sim \frac{1}{2n}$ et $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. On pose alors $\forall n \geq 1$, $w_n = t_n - \frac{1}{2n}$ et on procède de

manière similaire pour obtenir, pour tout $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} w_n - w_{n-1} &= \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{2n}\frac{1}{1-\frac{1}{n}} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= -\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n}\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

On a donc

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k - w_{k-1} = -w_n \sim \frac{1}{2}\frac{1}{6n^2} = \frac{1}{12n^2}$$

d'où le résultat. □

8 Dimension du commutant

Dans ce développement, on montre en se ramenant à la résolution d'un système d'équations linéaires homogène que la dimension du commutant d'une matrice est plus grande que celle de l'espace de départ. On applique ensuite ce résultat pour donner une condition nécessaire et suffisante qui permettant de calculer le commutant de cette matrice.

Soient $\mathbb{K}$ un corps, $n \geq 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Notation 1. — On note $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées triangulaires supérieures d'ordre n à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$.

— On note $\mathscr{C}(A)$ le commutant de A.

Remarque 2. On considère acquis le fait que si $\pi_A = \chi_A$, alors A est cyclique :

$$\exists x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \text{ tel que } (x, Ax, \dots, A^{n-1}x) \text{ est une base de } \mathbb{K}^n$$

[GOU21] p. 289

Lemme 3.

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathscr{C}(A)) \geq n$$

[FGN2] p. 160

Démonstration. Commençons par poser le système d'équations linéaires homogène

$$AX - XA = 0$$

d'inconnue $X = (x_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathscr{S}$ l'espace des solutions de ce système.

Plaçons-nous d'abord dans le cas où $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]} \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$. Considérons ce système d'équations pour $X \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$; on a alors $\frac{n(n+1)}{2}$ inconnues dans $\mathbb{K}$. Comme $AX - XA$ est triangulaire supérieure, dire que X est solution revient à écrire $\frac{n(n+1)}{2}$ équations correspondant à la nullité des coefficients de $AX - XA$ dans la partie supérieure. Mais, de ces équations, on peut en retirer n qui sont triviales (celles situées sur la diagonale, de la forme $a_{i,i}x_{i,i} - x_{i,i}a_{i,i}$). Ce système a donc $\frac{n(n+1)}{2} - n$ équations pour seulement $\frac{n(n+1)}{2}$ inconnues. Ainsi,

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathscr{C}(A)) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathscr{S}) \geq \dim_{\mathbb{K}}(\mathscr{S} \cap \mathcal{T}_n(\mathbb{K})) \geq \frac{n(n+1)}{2} - \left(\frac{n(n+1)}{2} - n\right) = n$$

Si A n'est pas triangulaire mais est tout de même trigonalisable, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $T \in \mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PTP^{-1}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} X \in \mathscr{C}(A) &\iff AX = XA \\ &\iff (PTP^{-1})X = X(PTP^{-1}) \\ &\iff T(P^{-1}XP) = (P^{-1}XP)T \\ &\iff P^{-1}XP \in \mathscr{C}(T) \end{aligned}$$

et puisque $X \mapsto P^{-1}XP$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$\dim_{\mathbb{K}}(A) = \dim_{\mathbb{K}}(T)$$

donc on peut tout à fait se ramener au cas où A est triangulaire supérieure.

Enfin, si A n'est pas trigonalisable, on considère $\mathbb{L}$ une extension de $\mathbb{K}$ sur laquelle χ_A est scindé. L'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & AX - XA \end{array}$$

est linéaire, donc on peut considérer sa matrice $B \in \mathcal{M}_{n^2}(\mathbb{K})$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (il s'agit de la matrice associée au système d'équations linéaires). Alors $\mathcal{S} = \mathrm{Ker}(B)$. Le rang est invariant par extension de corps, donc

$$\mathrm{rang}_{\mathbb{K}}(B) = \mathrm{rang}_{\mathbb{L}}(B)$$

d'où

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{S}) &= \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}(B)) \\ &= n^2 - \mathrm{rang}_{\mathbb{K}}(B) \\ &= n^2 - \mathrm{rang}_{\mathbb{L}}(B) \\ &= \dim_{\mathbb{L}}(\mathrm{Ker}(B)) \\ &\geq n \end{aligned}$$

car A est trigonalisable dans $\mathbb{L}$. D'où le résultat. □

Théorème 4.

$$\mathbb{K}[A] = \mathscr{C}(A) \iff \pi_A = \chi_A$$

Démonstration. Sens direct : Supposons $\mathbb{K}[A] = \mathscr{C}(A)$. Le Lemme 3 entraîne que

$$\deg(\pi_A) = \dim(\mathbb{K}[A]) \geq n$$

Mais comme $\deg(\pi_A) \leq n$, on a $\deg(\pi_A) = n$. Par le théorème de Cayley-Hamilton, on conclut

$$\pi_A = \chi_A$$

Réciproque : On suppose $\pi_A = \chi_A$. Par la Remarque 2, on peut trouver $x \in\in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tel que $(x, Ax, \dots, A^{n-1}x)$ est une base de $\mathbb{K}^n$. Ainsi, l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathscr{C}(A) & \to & \mathbb{K}^n \\ B & \mapsto & Bx \end{array}$$

est linéaire injective. En effet, si $B \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, alors

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ BA^k x = A^k Bx = 0 \implies B = 0$$

car B s'annule sur une base de $\mathbb{K}^n$. D'où $\dim(\mathscr{C}(A)) \leq \dim(\mathbb{K}^n) = n$. On déduit à l'aide du Lemme 3 que

$$\dim(\mathscr{C}(A)) = n$$

Notons de plus que

$$\dim(\mathbb{K}[A]) = \deg(\pi_A) = \deg(\chi_A) = n$$

et comme $\mathbb{K}[A] \subseteq \mathscr{C}(A)$ (car tout polynôme en A commute avec A), on a bien le résultat. □

9 Dual de L_p

Avec les propriétés hilbertiennes de L_2 couplées à certaines propriétés des espaces L_p, on montre que le dual d'un espace L_p est L_q pour $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, dans le cas où $p\in]1,2[$ et où l'espace est de mesure finie.

Soit $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espace mesuré de mesure finie.

Notation 1. On note $\forall p\in[1,2]$, $L_p=L_p(X,\mathscr{A},\mu)$.

Lemme 2. Soient $p\in]1,2[$ et $f\in L_2$. Alors $f\in L_p$ telle que $\|f\|_p\leq M\|f\|_2$ où $M\geq 0$.

Démonstration. Comme $p\in]1,2[$, on a $\frac{2}{p}>1$. Soit r tel que $\frac{p}{2}+\frac{1}{r}=1$. On applique l'inégalité de Hölder à $g=|f|^p\mathbb{1}_X$ de sorte que

$$\int_X |f|^p\,\mathrm{d}\mu=\||f|^p\mathbb{1}_X\|_1\leq\||f|^p\|_{\frac{2}{p}}\|\mathbb{1}_X\|_r\leq\mu(X)^{\frac{1}{r}}\|f\|_2^p$$

d'où le résultat. □

Lemme 3. Soit $p\in]1,2[$. Alors L_2 est dense dans L_p pour la norme $\|.\|_p$.

Démonstration. Soit $f\in L_p$. On considère la suite de fonction (f_n) définie par

$$\forall n\in\mathbb{N},\ f_n=f\mathbb{1}_{|f|\leq n}$$

Clairement, (f_n) est une suite de L_2. On va chercher à appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions (g_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $g_n=|f_n-f|^p$:

— $\forall n\in\mathbb{N}$, g_n est mesurable.

— (g_n) converge presque partout vers la fonction nulle.

— Par convexité de la fonction $x\mapsto x^p$, on a

$$|f_n-f|^p=2^p\left|\frac{f_n}{2}-\frac{f}{2}\right|^p\leq 2^{p-1}(|f|^p+|f_n|^p)\leq 2^p|f|^p\in L_1$$

On peut donc conclure

$$\|f-f_n\|_p^p=\int_X|f-f_n|^p\,\mathrm{d}\mu\longrightarrow 0$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Théorème 4. L'application

$$\varphi:\begin{array}{ccc} L_q & \to & (L_p)' \\ g & \mapsto & \left(\varphi_g: f\mapsto\int_X fg\,\mathrm{d}\mu\right)\end{array}\qquad \text{où } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

[Z-Q] p. 222

est une isométrie linéaire surjective. C'est donc un isomorphisme isométrique.

Démonstration. Soit $g \in L_q$ et $f \in L_p$. L'inégalité de Hölder donne

$$|\varphi_g(f)| \leq \|g\|_q \|f\|_p$$

donc $\varphi_g \in (L_p)'$ et $|||\varphi_g||| \leq \|g\|_q$. De plus, si $g = 0$, alors $|||\varphi_g||| = \|g\|_q = 0$. On peut donc supposer $g \neq 0$.

Soit u une fonction mesurable de module 1, telle que $g = u|g|$. On pose $h = \overline{u}|g|^{q-1}$. Comme $q = p(q-1)$, on a

$$\int_X |h|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_X |g|^{(q-1)p} \,\mathrm{d}\mu = \int_X |g|^q \,\mathrm{d}\mu < +\infty$$

d'où $h \in L_p$ et $\|h\|_p^p = \|g\|_q^q = |\varphi_g(h)|$. Comme, $\frac{|\varphi_g(h)|}{\|h\|_p} \leq |||\varphi_g|||$, on a en particulier,

$$\underbrace{\int_X |g|^q \,\mathrm{d}\mu}_{=|\varphi_g(h)|} \leq |||\varphi_g||| \underbrace{\left(\int_X |g|^q \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}}_{=\|h\|_p}$$

et ainsi,

$$|||\varphi_g||| \geq \left(\int_X |g|^q \,\mathrm{d}\mu\right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\int_X |g|^q \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \|g\|_q$$

donc $|||\varphi_g||| = \|g\|_q$ et φ est une isométrie.

Montrons qu'elle est surjective. Soit $\ell \in (L_p)'$. D'après le Lemme 2, on a $L_2 \subseteq L_p$, donc on peut considérer la restriction $\widetilde{\ell} = \ell_{|L_2}$.

$$\forall f \in L_2, \quad |\widetilde{\ell}(f)| \leq \|\ell\| \|f\|_p \leq M \|\ell\| \|f\|_2 \implies \widetilde{\ell} \in (L_2)'$$

Comme L_2 est un espace de Hilbert, on peut appliquer le théorème de représentation de Riesz à $\widetilde{\ell}$. Il existe $g \in L_2$ telle que

$$\forall f \in L_2, \quad \widetilde{\ell}(f) = \int_X f\overline{g} \,\mathrm{d}\mu$$

Pour conclure, il reste à montrer que $g \in L_q$ et que l'égalité précédente est vérifiée sur L_p. Comme dans précédemment, on considère u de module 1 telle que $g = u|g|$ et on pose $f_n = \overline{u}|g|^{q-1}\mathbb{1}_{|g|\leq n} \in L_\infty \subseteq L_2$. On a

$$\int_X |g|^q \mathbb{1}_{|g|\leq n} \,\mathrm{d}\mu = \ell(f_n) \leq \|\ell\| \|f_n\|_p = \|\ell\| \left(\int_X |g|^q \mathbb{1}_{|g|\leq n} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

D'où

$$\left(\int_X |g|^q \mathbb{1}_{|g|\leq n} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_X |g|^q \mathbb{1}_{|g|\leq n} \,\mathrm{d}\mu\right)^{1-\frac{1}{p}} \leq \|\ell\|$$

D'après le théorème de convergence monotone, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_X |g|^q \mathbb{1}_{|g|\leq n} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_X |g|^q \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \|g\|_q \leq \|\ell\|$$

Et en particulier, $g \in L_q$. Ainsi, on a $\forall f \in L_2$, $\ell(f) = \varphi_g(f)$. Les applications ℓ et φ_g sont continues sur L_p et L_2 est dense dans L_p (par le Lemme 3), donc on a bien $\ell = \varphi_g = \varphi(g)$. □

Remarque 5. Plus généralement, si l'on identifie g et φ_g :

— L_q est le dual topologique de L_p pour $p \in]1, +\infty[$.

— L_∞ est le dual topologique de L_1 si μ est σ-finie.

[LI] p. 140

10 Équation de Sylvester

On montre que l'équation $AX + XB = C$ d'inconnue X admet une unique solution pour tout $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres sont de partie réelle strictement négative.

Lemme 1. Soit $\|.\|$ une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont les valeurs propres sont de partie réelle strictement négative. Alors il existe une fonction polynômiale $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$ tels que $\|e^{tA}\| \leq e^{-\lambda t} P(t)$. [GOU21] p. 200

Démonstration. On fait la décomposition de Dunford de $A : A = D+N$. Comme D et N commutent, on a $e^{tA} = e^{tD}e^{tN}$. Soient P la matrice de passage donnée par la base de diagonalisation de D et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres. En notant $|||.|||$ la norme subordonnée à $\|.\|_\infty$ sur $\mathbb{C}^n$, on a $\forall t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
|||e^{tD}||| &= |||e^{tP\,\mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)P^{-1}}||| \\
&= |||Pe^{t\,\mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)}P^{-1}||| \\
&\leq \underbrace{|||P|||\,|||P^{-1}|||}_{=\alpha} \sup_{\|x\|_\infty=1} \|\mathrm{Diag}(e^{t\lambda_1},\dots,e^{t\lambda_n})x\|_\infty \\
&\leq \alpha \sup_{i\in[\![1,n]\!]} e^{t\lambda_i} \\
&\leq \alpha e^{-\lambda t}
\end{aligned}$$

où $\lambda > 0$ par hypothèse. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, donc il existe $\beta > 0$ tel que $|||e^{tD}||| \leq \beta e^{-\lambda t}$.

Pour conclure, en notant r l'indice de nilpotence de N,

$$\begin{aligned}
\|e^{tA}\| &\leq \|e^{tD}\|\,\|e^{tN}\| \\
&\leq e^{-\lambda t} \underbrace{\sum_{k=0}^{r-1} \beta \frac{\|N\|^k t^k}{k}}_{=P(t)}
\end{aligned}$$

□

Théorème 2 (Équation de Sylvester)**.** Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices dont les valeurs propres sont de partie réelle strictement négative. Alors pour tout $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'équation $AX + XB = C$ admet une unique solution X dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. [I-P] p. 177

Démonstration. Comme l'application $\varphi : X \mapsto AX + XB$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, qui est un espace vectoriel de dimension finie, il suffit de montrer qu'elle est surjective pour obtenir l'injectivité (et donc l'unicité de la solution). Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On considère le problème de Cauchy suivant d'inconnue $Y : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

$$\begin{cases} Y' = AY + YB \\ Y(0) = C \end{cases} \tag{E}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants (on peut voir cela notamment en calculant les produits AY et YB et en effectuant la somme ; l'égalité matricielle avec C donnant le système d'équations voulu). D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, (E) admet une unique solution définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, que l'on note Y.

On vérifie que la solution est définie $\forall t \in \mathbb{R}$ par $Y(t) = \exp(tA)C\exp(tB)$. En effet pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$Y'(t) = A\exp(tA)C\exp(tB) + \exp(tA)CB\exp(tB) = AY + YB$$

car toute matrice M commute avec son exponentielle (puisque $\exp(M)$ est limite d'un polynôme en M) et donc M commute aussi avec $\exp(tM)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

On va maintenant montrer que $X = -\int_0^{+\infty} Y(s)\,\mathrm{d}s$ est la solution de l'équation de Sylvester. Pour tout $t \geq 0$, on intègre Y' entre 0 et t pour obtenir :

$$Y(t) - C = \int_0^t Y'(s)\,\mathrm{d}s = A \times \int_0^t Y(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t Y(s)\,\mathrm{d}s \times B$$

Il ne reste donc plus qu'à montrer que $Y(t) \longrightarrow 0$ et que Y est intégrable pour conclure. Par le Lemme 1, il existe $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ et $P_1, P_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polynômiales tels que $\|e^{tA}\| \leq e^{-\lambda_1 t}P_1(t)$ et $\|e^{tB}\| \leq e^{-\lambda_2 t}P_2(t)$ pour tout $t \geq 0$. Ainsi, en posant $\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2)$ et $P = P_1P_2$, comme $\|.\|$ est une norme d'algèbre :

$$\|Y(t)\| = \|e^{tA}Ce^{tB}\| \leq \|C\|P(t)e^{-2\lambda t}$$

En particulier, on a bien $Y(t) \longrightarrow 0$. De plus, comme $CP(t)e^{-2\lambda t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et domine $\|Y(t)\|$, alors Y est aussi intégrable $[0, +\infty[$. Finalement, en faisant $t \longrightarrow +\infty$, on obtient :

$$-C = A \times \int_0^{+\infty} Y(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^{+\infty} Y(s)\,\mathrm{d}s \times B$$

Donc $\varphi(X) = X$: φ est surjective et X est bien la solution de l'équation de Sylvester. □

Remarque 3. Pour dire que toute matrice M commute avec $\exp(M)$, on aurait simplement pu dire que $\exp(M)$ est un polynôme en M ie. $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exists P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\exp(M) = P(M)$.

[GOU21] p. 189

Démonstration. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. L'ensemble $\mathbb{C}[M] = \{P(M) \mid P \in \mathbb{C}[X]\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui est de dimension finie, donc $\mathbb{C}[M]$ l'est aussi et est en particulier fermé.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{M^k}{k!} \in \mathbb{C}[M]$ de sorte que $P_n \longrightarrow_{n\to+\infty} \exp(M)$. Comme $\mathbb{C}[M]$ est fermé, on en déduit que $\exp(M) \in \mathbb{C}[M]$. Donc $\exists P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\exp(M) = P(M)$. □

11 Équivalence des normes en dimension finie et théorème de Riesz

On montre l'équivalence des normes en dimension finie ainsi que le théorème de Riesz sur la compacité de la boule unité fermée toujours en dimension finie, qui sont deux résultats fondamentaux sur les espaces vectoriels normés.

Lemme 1. Les compacts de $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$ sont les fermés bornés.

[I-P] p. 422

Démonstration. Soit X une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$. Soit (x_n) une suite de X. On note $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, x_k^i la i-ième composante du vecteur x_k. Comme X est bornée, alors $(\|x_n\|_\infty)$ est une suite réelle bornée. Montrons par récurrence que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, il existe des extractrices $\varphi_1, \dots, \varphi_i$ telle que la suite réelle $(x^i_{\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_i(n)})$ converge pour tout $i \in [\![1,k]\!]$.

- Pour $k=1$, c'est une réécriture du théorème de Bolzano-Weierstrass.
- Pour $k>1$, supposons avoir construit $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ telles que $(x^i_{\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_k(n)})$ converge pour tout $i \in [\![1,k]\!]$. Comme
$$|x_n^{k+1}| \leq \|x_n\|_\infty$$
$(x^{k+1}_{\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_k(n)})$ est une suite réelle bornée. Toujours par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une extractrice φ_{k+1} telle que $(x^{k+1}_{\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_{k+1}}(n))$ converge. D'où l'hérédité.

La propriété est en particulier pour $k=n$. En posant $\varphi = \varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_n$, on obtient une extractrice telle que
$$\forall i \in [\![1,n]\!], (x^i_{\varphi(n)}) \text{ converge}$$
et on en déduit que $(x_{\varphi(n)})$ converge vers un réel $x \in \mathbb{R}^n$. Comme X est fermé, $x \in X$. X est donc séquentiellement compact, donc compact. □

Proposition 2. Soient (E, d_E), (F, d_f) deux espaces métriques et $f : E \to F$ continue. Si E est compact, alors $f(E)$ est compact dans F.

Démonstration. Soit (y_n) une suite d'éléments de $f(E)$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = f(y_n)$. E est compact, donc il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $x_{\varphi(n)} \longrightarrow_{n \to +\infty} x$ où $x \in E$. Par continuité,
$$y_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)}) \longrightarrow_{n \to +\infty} f(x) \in f(E)$$
$f(E)$ est ainsi séquentiellement compact, donc est compact. □

Théorème 3. Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ de dimension finie $n \in \mathbb{N}$. Alors, toutes les normes sur E sont équivalentes.

Démonstration. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On définit la norme infinie $\mathcal{N}_\infty$ associée à

la base $\mathscr{B}$ pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$ par

$$\mathcal{N}_\infty : x \mapsto \max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|$$

Si $\mathcal{N}$ est une norme sur E, on a :

$$\mathcal{N}(x) \leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \mathcal{N}(e_i) \right)}_{=\alpha} \mathcal{N}_\infty(x)$$

Donc $\mathcal{N}_\infty$ est plus fine que $\mathcal{N}$.

Définissons l'isomorphisme suivant :

$$f : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n, \|.|_\infty) & \to & (E, \mathcal{N}) \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \end{array}$$

La fonction f vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \mathcal{N}(f(x)) \leq \alpha \|x|_\infty$$

c'est une application linéaire bornée, qui est donc continue. Comme elle est bijective, l'ensemble

$$S_E = \{x \in E \mid \mathcal{N}_\infty(x) = 1\} = f(S)$$

où S désigne la sphère unité de $(\mathbb{R}^n, \|.\|_\infty)$, qui est compacte d'après le Lemme 1. D'après le Proposition 2, S_E est compacte comme image d'un compact par une application continue. L'application $\mathcal{N} : E \to \mathbb{R}$ est continue car lipschitzienne ($\forall x, y \in E, |\mathcal{N}(x) - \mathcal{N}(y)| \leq \mathcal{N}(x - y)$), donc est bornée et atteint ses bornes sur la sphère S_E. On note $x_0 \in E$ ce minimum :

$$\forall x \in E \text{ tel que } \mathcal{N}_\infty(x) = 1, \text{ on a } \mathcal{N}(x) \geq \underbrace{\mathcal{N}(x_0)}_{=\beta}$$

Ainsi,

$$\forall x \in E, \mathcal{N}\left(\frac{x}{\mathcal{N}_\infty(x)} \right) \geq \beta \text{ ie. } \mathcal{N}(x) \geq \beta \mathcal{N}_\infty(x)$$

Donc $\mathcal{N}$ est plus fine que $\mathcal{N}_\infty$: les normes $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}_\infty$ sont équivalentes. Comme la relation d'équivalence sur les normes d'un espace vectoriel est transitive, on en déduit que toutes les normes sur E sont équivalentes. □

Théorème 4 (Riesz)**.** Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé sur le corps $\mathbb{R}$. Alors, E est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte.

Démonstration. Notons $\overline{B}$ la boule unité fermée de E et supposons E de dimension finie $n \in \mathbb{N}$. Comme dans la démonstration du théorème précédent, $\overline{B}$ est compacte comme image de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ par l'application continue f. Réciproquement, supposons E de dimension

finie et, par l'absurde, également que $\overline{B}$ est compacte. On a,

$$\overline{B} \subseteq \bigcup_{x \in E} B(x,1)$$

où $B(x,1)$ désigne la boule ouverte centrée en x de rayon 1. Par la propriété de Borel-Lebesgue, il existe $x_1, \dots, x_n \in E$ tels que

$$\overline{B} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,1)$$

On définit $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. Comme F est de dimension finie et E de dimension infinie, on peut trouver $y \in E \setminus F$. Soit $x_0 \in F$ le projeté de y sur F :

$$d(y,F) = \|y - x_0\|$$

On pose

$$u = \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|}$$

On a u de norme 1, donc $u \in \overline{B}$ et il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $\|u - x_i\| < 1$. Or,

$$\begin{aligned} \|u - x_i\| &= \frac{\|y - x_0 - \|y - x_0\| x_i\|}{\|y - x_0\|} \\ &= \frac{\|y - (x_0 - \|y - x_0\| x_i)\|}{\|y - x_0\|} \\ &\geq \frac{d(y,F)}{\|y - x_0\|} \\ &= 1 \end{aligned}$$

car $x_0 + \|y - x_0\| x_i \in F$: absurde. □

12 Formes de Hankel

Le but de ce développement est de construire une forme quadratique permettant de dénombrer les racines réelles distinctes d'un polynôme en fonction de ses racines complexes.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n.

[C-G] p. 356

Théorème 1 (Formes de Hankel)**.** On note $x_1, \dots, x_t$ les racines complexes de P de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_t$. On pose

$$s_0 = n \text{ et } \forall k \geq 1,\ s_k = \sum_{i=1}^{t} m_i x_i^k$$

Alors :

(i) $\sigma = \sum_{i,j \in [\![0,n-1]\!]} s_{i+j} X_i X_j$ définit une forme quadratique sur $\mathbb{C}^n$ ainsi qu'une forme quadratique $\sigma_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}^n$.

(ii) Si on note (p,q) la signature de $\sigma_{\mathbb{R}}$, on a :

— $t = p + q$.

— Le nombre de racines réelles distinctes de P est $p - q$.

Démonstration. σ est un polynôme homogène de degré 2 sur $\mathbb{C}$ (car la somme des exposants est 2 pour chacun des monômes), qui définit donc une forme quadratique sur $\mathbb{C}^n$. De plus, on peut écrire :

$$\forall k \geq 1,\ s_k = \sum_{\substack{x \text{ racine de P} \\ x \in \mathbb{R}}} m_k x^k + \sum_{\substack{x \text{ racine de P} \\ x \in \mathbb{C}}} m_k (x^k + \overline{x}^k)$$

donc $s_k = \overline{s_k}$ ie. $s_k \in \mathbb{R}$. Donc σ définit une forme quadratique $\sigma_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}^n$. D'où le premier point.

Soit φ_k la forme linéaire sur $\mathbb{C}^n$ définie par le polynôme homogène de degré 1

$$P_k(X_0, \dots, X_{n-1}) = X_0 + x_k X_1 + \cdots + x_k^{n-1} X_{n-1}$$

pour $k \in [\![0,t]\!]$. Dans la base duale $(e_i^*)_{i \in [\![0,n-1]\!]}$ de la base canonique $(e_i)_{i \in [\![0,n-1]\!]}$ de $\mathbb{C}^n$, on a

$$\varphi_k = e_0^* + x_k e_1^* + \cdots + x_k^{n-1} e_{n-1}^*$$

Et comme

$$\det((\varphi_k)_{k \in [\![0,t]\!]}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_t \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \dots & x_t^{n-1} \end{vmatrix} \underset{\text{Vandermonde}}{\neq} 0$$

la famille $(\varphi_k)_{k \in [\![0,t]\!]}$ est de rang t sur $\mathbb{C}$. Or, le coefficient de $X_i X_j$ dans $\sum_{k=1}^t m_k \varphi_k^2$ vaut

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^t m_k x_k^{2i} = s_{i+j} & \text{si } i = j \\ \sum_{k=1}^t 2 m_k x_k^i x_k^j = \sum_{k=1}^t 2 m_k x_k^{i+j} = 2 s_{i+j} & \text{sinon} \end{cases}$$

donc, $\sigma = \sum_{k=1}^{t} m_k \varphi_k^2$. En particulier, $\text{rang}(\sigma) = t$ par indépendant des φ_k. On en déduit,

$$p + q = \text{rang}(\sigma) = \text{rang}(\sigma_{\mathbb{R}}) = t$$

(le rang est invariant par extension de corps).

Soit $k \in [\![0, t]\!]$. Calculons la signature de la forme quadratique $\varphi_k^2 + \overline{\varphi_k}^2$:

— Si $x_k \in \mathbb{R}$, on a $\varphi_k^2 + \overline{\varphi_k}^2 = 2\varphi_k^2$, qui est de signature $(1,0)$ car $\varphi_k \neq 0$.

— Si $x_k \notin \mathbb{R}$, on a $\varphi_k^2 + \overline{\varphi_k}^2 = 2\,\text{Re}(\varphi_k)^2 - 2\,\text{Im}(\varphi_k)^2$ qui est bien une forme quadratique réelle. Et $x_k = \overline{x_k}$, donc la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_k & \overline{x_k} \\ \vdots & \vdots \\ x_k^{n-1} & \overline{x_k}^{n-1} \end{pmatrix}$$

est de rang 2 (cf. le mineur correspondant aux deux premières lignes). Donc φ_k et $\overline{\varphi_k}$ sont indépendantes. Ainsi, $\text{rang}(\varphi_k^2 + \overline{\varphi_k}^2) = 2$ sur $\mathbb{C}$, donc sur $\mathbb{R}$ aussi (toujours par invariance du rang par extension de corps). Donc la signature de $\varphi_k^2 + \overline{\varphi_k}^2$ est $(1,1)$.

Maintenant, regroupons les φ_k conjuguées entre elles lorsqu'elles ne sont pas réelles :

$$\sigma = \sum_{\substack{k=1 \\ x_k \in \mathbb{R}}}^{t} m_k \varphi_k^2 + \sum_{\substack{k=1 \\ x_k \notin \mathbb{R}}}^{t} m_k (\varphi_k^2 + \overline{\varphi_k}^2)$$

En passant à la signature, on obtient :

$$(p,q) = (r,0) + \left(\frac{t-r}{2}, \frac{t-r}{2}\right) = \left(\frac{t+r}{2}, \frac{t-r}{2}\right)$$

où r désigne le nombre de racines réelles distinctes de P. Par unicité de la signature d'une forme quadratique réelle, on a bien $p - q = r$. D'où le point (ii). □

Remarque 2. Tout l'intérêt de ces formes quadratiques est qu'on peut calculer les s_k par récurrence en utilisant les polynômes symétriques élémentaires, sans avoir besoin des racines.

Proposition 3 (Sommes de Newton)**.** On pose $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Les sommes de Newton vérifient les relations suivantes :

[GOU21] p. 86

(i) $s_0 = n$.

(ii) $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $s_k = -k a_{n-k} \sum_{i=1}^{k-1} s_i a_{n-k+i}$.

(iii) $\forall p \in \mathbb{N}$, $s_{p+n} = \sum_{i=1}^{n} s_i a_{p+n-i}$.

13 Formule de Stirling

Dans ce développement un peu technique, nous démontrons la formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ *à l'aide du théorème central limite et de la fonction* Γ *d'Euler.*

Lemme 1. Soit Y une variable aléatoire réelle à densité. Alors $\forall n \geq 1$, $\frac{Y-n}{\sqrt{n}}$ est à densité et,

$$f_{\frac{Y-n}{\sqrt{n}}}(x) = \sqrt{n} f_Y(n + x\sqrt{n}) \text{ pp. en } x \in \mathbb{R}$$

Démonstration. $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_{\frac{Y-n}{\sqrt{n}}}(x) &= \mathbb{P}\left(\frac{Y-n}{\sqrt{n}} \leq x\right) \\ &= \mathbb{P}(Y \leq x\sqrt{n} + n) \\ &= F_Y(x\sqrt{n} + n) \end{aligned}$$

Or, la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à densité est dérivable presque partout, et sa dérivée est presque partout égale à sa densité. Donc :

$$f_{\frac{Y-n}{\sqrt{n}}}(x) = \sqrt{n} f_Y(x\sqrt{n} + n) \text{ pp. en } x \in \mathbb{R}$$

□

Remarque 2. Il ne s'agit ni plus ni moins qu'une version affaiblie du théorème de changement de variable.

Lemme 3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim \Gamma(a, \gamma)$ et $Y \sim \Gamma(b, \gamma)$. Alors $Z = X + Y \sim \Gamma(a + b, \gamma)$.

[G-K] p. 180

Démonstration. Soit $f_{a,\gamma} : x \mapsto \frac{\gamma^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\gamma x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$ la densité de la loi $\Gamma(a, \gamma)$. $\forall x \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} f_Z(x) &= \int_0^x f_{a,\gamma}(x-t) f_{b,\gamma}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \frac{\gamma^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-\gamma t} \frac{\gamma^b}{\Gamma(b)} (x-t)^{b-1} e^{-\gamma(x-t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\gamma^{a+b} e^{-\gamma x}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^x t^{a-1}(x-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t \\ &\overset{t=ux}{=} \frac{\gamma^{a+b} e^{-\gamma x}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a+b-1} \int_0^1 u^{a-1}(x-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t \\ &= K_{a,b} f_{a+b,\gamma}(x) \end{aligned}$$

où $K_{a,b} = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}\,\mathrm{d}u$. Notons par ailleurs que f_Z est nulle sur $\mathbb{R}^-$ et coïncide donc avec $K_{a,b} f_{a+b,\gamma}$ sur $\mathbb{R}^-$.

Pour conclure, on utilise la condition de normalisation :

$$1 = \int_{\mathbb{R}} f_Z(x)\,\mathrm{d}x = K_{a,b} \int_{\mathbb{R}} f_{a+b,\gamma}(x)\,\mathrm{d}x = K_{a,b}$$

On obtient ainsi $f_Z = f_{a+b,\gamma}$, ce que l'on voulait. □

p. 556

Théorème 4 (Formule de Stirling)**.**

$$n! \sim \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Démonstration. Soit (X_n) une suite de variable aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{E}(1)$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n X_k$. Montrons par récurrence que $S_n \sim \Gamma(n+1,1)$.

— Pour $n = 0$: c'est clair car $\mathscr{E}(1) = \Gamma(1,1)$.

— On suppose le résultat vrai à un rang $n \geq 0$. Pour montrer qu'il reste vrai au rang $n+1$, il suffit d'appliquer le Lemme 3 à $S_n \sim \Gamma(n,1)$ et $X_{n+1} \sim \Gamma(1,1)$ (qui sont bien indépendantes).

Par le Lemme 1 appliqué à S_n, pp. en $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\overbrace{f_{\frac{S_n-n}{\sqrt{n}}}(x)}^{=g_n(x)} &= \sqrt{n} f_{S_n}(n + x\sqrt{n}) \\
&= \frac{\sqrt{n}}{\Gamma(n+1)} n^n \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-(n+x\sqrt{n})} \mathbb{1}_{[-\sqrt{n},+\infty[}(x) \\
&= a_n h_n(x)
\end{aligned}$$

avec :

— $a_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}\sqrt{2\pi}}{\Gamma(n+1)}$ (ce qui nous intéresse).

— $h_n : x \mapsto \frac{e^{-\sqrt{n}x}}{\sqrt{2\pi}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n \mathbb{1}_{[-\sqrt{n},+\infty[}(x)$ (ce qui nous intéresse moins).

Montrons maintenant que $\frac{S_n-n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers $\mathscr{N}(0,1)$. D'après le théorème central limite,

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\mathrm{Var}(S_n)} \xrightarrow{(d)} \mathscr{N}(0,1)$$

où :

— $\mathbb{E}(S_n) = (n+1)\mathbb{E}(X_0) = n+1$.

— $\mathrm{Var}(S_n) = (n+1)\,\mathrm{Var}(X_0) = n+1$ par indépendance.

On applique maintenant le théorème de Slutsky :

$$\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} = \underbrace{\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}}_{\longrightarrow 1}\left(\underbrace{\frac{S_n-(n+1)}{\sqrt{n+1}}}_{\xrightarrow{(d)}\mathcal{N}(0,1)} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}_{\longrightarrow 0}\right) \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0,1)$$

Tout cela pour dire que,

$$\int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x = \mathbb{P}\left(\frac{S_n-n}{\sqrt{n}} \in [0,1]\right) \longrightarrow \int_0^1 \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}x$$

De plus :

— $\forall n \in \mathbb{N}$, h_n est mesurable.

— $\forall x \in \mathbb{R}$, $h_n(x) = \frac{e^{-x^2\varphi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)}}{\sqrt{2\pi}}\mathbb{1}_{]-1,+\infty[}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$ où $\forall x > -1$, $\varphi(x) = \frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$. Par développement limité, on a $\lim_{x\to 0}\varphi(x) = \frac{1}{2}$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $h_n(x) \longrightarrow \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$.

— Comme $\forall x > -1$, $\varphi(x) \geq 0$, alors h_n est dominée par $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Donc par le théorème de convergence dominée,

$$\int_0^1 h_n(x)\,\mathrm{d}x \longrightarrow \int_0^1 \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}x$$

Pour conclure, on écrit :

$$\int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x = a_n \int_0^1 h_n(x)\,\mathrm{d}x \implies \lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x}{\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 h_n(x)\,\mathrm{d}x} = 1$$

et comme $\Gamma(n+1) = n!$, par définition de a_n :

$$1 = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\sqrt{2\pi}}{n!}$$

□

14 Formule sommatoire de Poisson

On démontre la formule sommatoire de Poisson en utilisant principalement la théorie des séries de Fourier.

Théorème 1 (Formule sommatoire de Poisson)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $f'(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ quand $|x| \longrightarrow +\infty$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(2\pi n) e^{2i\pi nx}$$

où $\widehat{f}$ désigne la transformée de Fourier de f.

[GOU20] p. 284

Démonstration. Comme $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$, il existe $M > 0$ et $A > 0$ tel que

$$\forall |x| > A,\ |f(x)| \leq \frac{M}{x^2} \qquad (*)$$

Soit $K > 0$. On a $\forall x \in [-K, K]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ tel que $|n| > K + A$:

$$|f(x+n)| \overset{(*)}{\leq} \frac{M}{(x+n)^2} \leq \frac{M}{(|n|-K)^2}$$

Donc $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$ donc converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note F la limite simple en question.On montre de même que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f'(x+n)$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$. Donc par le théorème de dérivation des suites de fonctions, F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment de $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}$ tout entier (la continuité et la dérivabilité sont des propriétés locales).Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} &\forall N \in \mathbb{N},\ \sum_{n=-N}^{N} f(x+1+n) = \sum_{n=-N-1}^{N+1} f(x+n) \\ &\overset{N\longrightarrow+\infty}{\Longrightarrow} F(x+1) = F(x) \end{aligned}$$

ie. F est 1-périodique. On peut calculer ses coefficients de Fourier. $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n(F) = \int_0^1 F(t) e^{-2i\pi nt}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t+n) e^{-2i\pi nt}\,\mathrm{d}t$$

Par convergence uniforme sur un segment, on peut échanger somme et intégrale :

$$c_n(F) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(t) e^{-2i\pi nt}\,\mathrm{d}t$$

Or, la transformée de Fourier d'une fonction L_1 est convergente. On peut donc écrire :

$$c_n(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi nt}\,\mathrm{d}t = \widehat{f}(2\pi n)$$

Comme F est de classe $\mathscr{C}^1$, sa série de Fourier converge uniformément vers F. D'où le résultat. □

Application 2 (Identité de Jacobi)**.**

$$\forall s > 0,\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{s}}$$

Démonstration. Soit $\alpha > 0$. On définit $G_\alpha : x \mapsto e^{-\alpha x^2}$ et on connaît sa transformée de Fourier :

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \widehat{G_\alpha}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}$$

Soit $s > 0$. Appliquons le Théorème 1 à la fonction $G_{\pi s}$:

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi s(x+n)^2} &= \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{(2\pi n)^2}{4\pi s}} e^{2i\pi nx} \\ \overset{x=0}{\Longrightarrow} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi s n^2} &= \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi n^2}{s}} \end{aligned}$$

□

15 exp : $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme

Dans ce développement, on démontre que l'exponentielle de matrices induit un homéomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Lemme 1. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. Il suffit d'écrire

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM = M\} = f^{-1}\{0\}$$

où $f : M \mapsto {}^tM - M$ est continue, donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est fermé en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue. □

Lemme 2. Une suite bornée d'un espace métrique qui admet une seule valeur d'adhérence converge vers cette valeur d'adhérence.

Démonstration. Soit (x_n) une suite bornée d'un espace métrique (E,d) qui n'admet qu'une seule valeur d'adhérence $\ell \in E$. On suppose par l'absurde que (x_n) ne converge pas vers ℓ :

$$\exists \epsilon > 0 \text{ tel que } \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N \text{ tel que } d(x_n, \ell) > \epsilon \qquad (*)$$

On va construire une sous-suite qui converge vers une valeur d'adhérence différente de ℓ.

Par $(*)$ appliqué à $N = 0$, $\exists n_0 \geq 0$ tel que $d(x_{n_0}, \ell) > \epsilon$. On définit donc $\varphi(0) = n_0$.

Supposons construite $\varphi(i)$ jusqu'à un rang k telle que $\forall i <\leq> k$, $\varphi(i+1) > \varphi(i)$ (lorsque cela à un sens) et $d(x_{\varphi(i)}, \ell) > \epsilon$. Il suffit alors d'appliquer $(*)$ à $N = \varphi(n) + 1$ pour obtenir un $n_k \geq \varphi(n) + 1 > \varphi(n)$ tel que $d(x_{n_k}, \ell) > \epsilon$; on définit alors $\varphi(k+1) = n_k$.

Nous venons donc de construire par récurrence une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $d(x_{\varphi(n)}, \ell) > \epsilon$. La suite $(x_{\varphi(n)})$ est bornée (par hypothèse) : elle est contenue dans un compact et admet une valeur d'adhérence ℓ' (par le théorème de Bolzano-Weierstrass). Soit donc $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{(\varphi\circ\psi)(n)})$ converge vers ℓ'.

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $d(x_{(\varphi\circ\psi)(n)}, \ell) > \epsilon$, qui donne $d(\ell', \ell) \geq \epsilon$ après un passage à la limite. Donc $\ell \neq \ell'$. Et ℓ' est clairement valeur d'adhérence de (x_n) : absurde. □

Lemme 3. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors,

$$|||S|||_2 = \rho(S)$$

où ρ est l'application qui a une matrice y associe son rayon spectral.

[I-P] p. 182

Démonstration. D'après le théorème spectral, il existe $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de S associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de S, qui sont réelles car S

est symétrique. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ dont on note $(x_1, \dots, x_n)$ ses coordonnées dans cette base. On a

$$\|Sx\|_2^2 = \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i \right\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 x_i^2 \leq \rho(S)^2 \|x\|_2^2$$

D'où $|||S|||_2 \leq \rho(S)$. Pour obtenir l'inégalité inverse, il suffit de considérer $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de S telle que $|\lambda| = \rho(S)$ et $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre associé à λ. On a alors

$$\|Sx\|_2 = |\lambda| \|x\|_2$$

et on a bien $\rho(S) \leq |||S|||_2$. □

Théorème 4. L'application exp : $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

Démonstration. Montrer qu'une application est un homéomorphisme se fait en 4 étapes : on montre qu'elle est continue, injective, surjective, et que la réciproque est elle aussi continue.

— L'application est bien définie et continue : Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral,

$$\exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } S = P \underbrace{\operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}_{=D} P^{-1}$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ désignent les valeurs propres de S. On a donc

$$\begin{aligned} \exp(S) &= P^{-1} \exp(D) P \\ &= P^{-1} \operatorname{Diag}(e^{\lambda_1}, \dots, \lambda_n) P \end{aligned}$$

Or, $P^{-1} = {}^tP$, donc ${}^t\exp(S) = \exp(S)$ et $\exp(S) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$${}^t xSx = {}^t(Px) D (Px) > 0$$

car $D \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Donc $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

— L'application est surjective : Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On peut écrire

$$S = P \operatorname{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) P^{-1}$$

Il suffit alors de poser $U = P^{-1} \operatorname{Diag}(\ln(\mu_1), \dots, \ln(\mu_n)) P \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ pour avoir $\exp(U) = S$; d'où la surjectivité.

— L'application est injective : Soient $S, S' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $\exp(S) = \exp(S')$. Montrons que $S = S'$. Comme avant, $\exists P, P' \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$S = P \operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1} \text{ et } S' = P' \operatorname{Diag}(\lambda_1', \dots, \lambda_n') P'^{-1}$$

Soit $L \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $L(e^{\lambda_i}) = \lambda_i$ et $L(e^{\lambda_i'}) = \lambda_i'$ (les polynômes d'interpolation de Lagrange conviennent parfaitement et sont bien définis dans le cas présent car $e^{\lambda_i} =$

$e^{\lambda_j} \implies \lambda_i = \lambda_j$ par injectivité de l'exponentielle). D'où

$$\begin{aligned} L(\exp(S)) &= L(P\,\mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)P^{-1}) \\ &= PL(\exp(\mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)))P^{-1} \\ &= P\,\mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)P^{-1} \\ &= S \end{aligned}$$

et de même, $L(\exp(S')) = S'$. D'où $S = S'$.

— L'application inverse est continue : Soit (A_k) une suite de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ qui converge vers $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Il s'agit de montrer que la suite (B_k) de terme général $B_k = \exp^{-1}(A_k)$ converge vers $B = \exp^{-1}(A)$. Supposons tout d'abord (B_k) non bornée. Comme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $|||.|||_2 = \rho(.)$ (par le Lemme 3), il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\rho(B_{\varphi}(k)) \longrightarrow +\infty$. On peut donc extraire une suite de valeurs propres (λ_k) telle que $|\lambda_k| \longrightarrow +\infty$. Encore une fois, quitte à extraire, on peut supposer $\lambda_k \longrightarrow +\infty$ ou $\lambda_k \longrightarrow -\infty$.

  — Si $\lambda_k \longrightarrow +\infty$, $e^{\lambda_k} \longrightarrow +\infty$. Mais $\forall k \in \mathbb{N}$, e^{λ_k} est valeur propre de A_k, donc $\rho(A_k) \longrightarrow +\infty$: absurde car (A_k) converge.

  — Si $\lambda_k \longrightarrow -\infty$, $e^{-\lambda_k} \longrightarrow +\infty$. Mais $\forall k \in \mathbb{N}$, $e^{-\lambda_k}$ est valeur propre de A_k^{-1}, donc $\rho(A_k^{-1}) \longrightarrow +\infty$: absurde car (A_k^{-1}) converge par continuité de $M \mapsto M^{-1}$.

  Donc la suite (B_k) est bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, (B_k) admet une valeur d'adhérence $\widetilde{B}$. Comme $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est fermé (c'est le Lemme 1), $\widetilde{B} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

  Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $B_{\varphi(k)} \longrightarrow \widetilde{B}$. Alors,

$$\exp(B) = A \longleftarrow A_{\varphi(k)} = \exp(B_{\varphi(k)}) \longrightarrow \exp(\widetilde{B})$$

  ie. $\exp(B) = \exp(\widetilde{B})$; donc $B = \widetilde{B}$ par injectivité de exp. Donc par le Lemme 2, $B_k \longrightarrow B$.

□

16 Intégrale de Dirichlet

Il s'agit ici de calculer l'intégrale de Dirichlet en utilisant les théorèmes classiques d'intégration.

Lemme 1.

$$\forall y, t \in \mathbb{R}^+, |e^{-(y-i)t}| \leq 1$$

Démonstration. Soient $y, t \in \mathbb{R}^+$. On a :

$$|e^{-(y-i)t}| = |e^{-yt}e^{it}| = |e^{-yt}||e^{it}|$$

Or, e^{it} est un complexe de module 1 et $yt \geq 0$, donc $e^{-yt} \leq 1$. D'où le résultat. □

Théorème 2 (Intégrale de Dirichlet)**.** On pose $\forall x \geq 0$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

alors :

(i) F est bien définie et est continue sur $\mathbb{R}^+$.

(ii) F est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.

(iii) $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

[G-K] p. 107

Démonstration. Posons $\forall x \in \mathbb{R}^+$ et $\forall t \in \mathbb{R}_*^+, f(x,t) = \frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}$ ainsi que $\forall n \geq 1, F_n(x) = \int_0^n \frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}\,\mathrm{d}t$. p. 178
On a :

— $\forall x \geq 0$, $t \mapsto f(x,t)$ est mesurable.

— Presque partout en $t > 0$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue.

— $\forall x \geq 0$ et presque partout en $t > 0$, $|f(x,t)| \leq 1$, et $t \mapsto 1$ est intégrable sur $[0,n]$.

On peut donc appliquer le théorème de continuité sous l'intégrale pour conclure que F_n est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Soient $x \geq 0$ et $q \geq p \geq N \geq 0$. On a :

$$\begin{aligned}
|F_q(x) - F_p(x)| &= \left| \int_p^q f(x,t)\,\mathrm{d}t \right| \\
&= \left| \mathrm{Im}\left(\int_p^q e^{-xt} \frac{e^{it}}{t}\,\mathrm{d}t \right) \right| \\
&\leq \left| \int_p^q \frac{e^{-(x-i)t}}{t}\,\mathrm{d}t \right| \\
&= \frac{1}{|x-i|} \left| \int_p^q (x-i) \frac{e^{-(x-i)t}}{t}\,\mathrm{d}t \right| \\
&\leq \left| \int_p^q (x-i) \frac{e^{-(x-i)t}}{t}\,\mathrm{d}t \right| \\
&= \left| \int_p^q -(x-i) e^{-(x-i)t} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \right|
\end{aligned}$$

Nous allons réaliser une intégration par parties. Pour cela, posons :

— $u'(t) = -(x-i)e^{-(x-i)t} \implies u(t) = e^{-(x-i)t}$

— $v(t) = \frac{1}{t} \implies v'(t) = -\frac{1}{t^2}$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\left| \int_p^q (x-i) \frac{e^{-(x-i)t}}{t}\,\mathrm{d}t \right| &= \left| [u(t)v(t)]_p^q - \int_p^q u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t \right| \\
&= \left| \frac{e^{-(q-i)t}}{q} - \frac{e^{-(p-i)t}}{p} + \int_p^q \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}\,\mathrm{d}t \right|
\end{aligned}$$

On applique maintenant le Lemme 1 :

$$\begin{aligned}
\left| \frac{e^{-(q-i)t}}{q} - \frac{e^{-(p-i)t}}{p} + \int_p^q \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}\,\mathrm{d}t \right| &\leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \int_p^q \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \left[\frac{1}{t} \right]_p^q \\
&\leq \frac{2}{N}
\end{aligned}$$

D'où :

$$|F_q(x) - F_p(x)| \leq \frac{2}{N}$$

Donc la suite de fonctions continues (F_n) vérifie le critère de Cauchy uniforme, et converge ainsi vers F uniformément. En particulier, F est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Soit $a > 0$. f est dérivable par rapport à x et pour tout $x \in]a, +\infty|$ et $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| = |-\sin(t)e^{-xt}| \leq e^{-at}$$

On applique le théorème de dérivation sous l'intégrale, qui donne :

$$\forall x \in]a, +\infty[, F'(x) = \int_0^{+\infty} -\sin(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

En particulier, c'est vrai sur $\mathbb{R}_*^+$ car la dérivabilité est une propriété locale. Or $\forall A > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
&\int_0^A e^{-(i+x)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1-e^{-(i+x)A}}{i+x} \\
\implies &\lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-(i+x)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{i+x} = \frac{-i+x}{1+x^2} \\
\implies &\mathrm{Im}\left(\lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-(i+x)t}\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{-i+x}{1+x^2}\right) = -\frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

Or,

$$\mathrm{Im}\left(\lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-(i+x)t}\,\mathrm{d}t\right) = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A \mathrm{Im}\left(e^{-(i+x)t}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} -\sin(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t = F'(x)$$

En recollant les deux morceaux :

$$F'(x) = -\frac{1}{1+x^2} \qquad (*)$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}_*^+$. En intégrant $(*)$ entre x et y, on obtient :

$$F(x) - F(y) = \arctan(x) - \arctan(y)$$

Mais,

$$\begin{aligned}
|F(y)| &= \left|\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}e^{-yt}\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin(t)}{t}e^{-yt}\right|\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^{+\infty} e^{-yt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{y} \\
&\longrightarrow_{y\to+\infty} 0
\end{aligned}$$

Il suffit donc de faire tendre y vers $+\infty$ pour obtenir :

$$\forall x > 0, F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$$

Ce qui, en faisant tendre x vers 0, donne :

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

□

17 Lemme de Morse

En usant (certains diront plutôt "en abusant") du théorème d'inversion locale, on montre le lemme de Morse et on l'applique à l'étude de la position d'une surface par rapport à son plan tangent.

Notation 1. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une application dont toutes les dérivées secondes existent, on note $\mathrm{Hess}(f)_a$ la hessienne de f au point a.

Lemme 2. Soit $A_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ inversible. Alors il existe un voisinage V de A_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et une application $\psi : V \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall A \in V,\ A = {}^t\psi(A) A_0 \psi(A)$$

[ROU] p. 209

Démonstration. On définit l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tMA_0M \end{array}$$

qui est une application polynômiale en les coefficients de M, donc de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On calcule :

$$\begin{aligned} \varphi(I_n + H) - \varphi(I_n) &= {}^tHA_0 + A_0H + {}^tHA_0 + H \\ &= {}^t(A_0H) + A_0H + o(\|H\|^2) \end{aligned}$$

où $(\|.\|$ désigne une quelconque norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. Ainsi, on a $\mathrm{d}\varphi_{I_n}(H) = {}^t(A_0H) + A_0H$. D'où

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{d}\varphi_{I_n}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A_0M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})\} = A_0^{-1}\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

On définit donc

$$F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A_0M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\} = A_0^{-1}\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

et on a $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = F \oplus \mathrm{Ker}(\mathrm{d}\varphi_{I_n})$. Ainsi, la différentielle $\mathrm{d}(\varphi_{|F})_{I_n}$ est bijective (car $\mathrm{Ker}(\mathrm{d}(\varphi_{|F})_{I_n}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{d}\varphi_{I_n}) \cap F = \{0\}$).

On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale à $\varphi_{|F}$: il existe U un voisinage ouvert de I_n dans F tel que $(\varphi_{|U})$ soit $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur $V = \varphi(U)$. De plus, on peut supposer $U \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (quitte à considérer $U \cap U'$ où U' est un voisinage ouvert de I_n dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$; qui existe par continuité de det).

Ainsi, V est un voisinage ouvert de $A_0 = \varphi(I_n)$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall A \in V,\ A = {}^t(\varphi_{|U})^{-1}(A) A_0 (\varphi_{|U})^{-1}(A)$$

Il suffit alors de poser $\psi = (\varphi_{|U})^{-1}$ (qui est bien une application de classe $\mathcal{C}^1$) pour avoir le résultat demandé. □

p. 354

Lemme 3 (Morse)**.** Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^3$ (où U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine). On suppose :

— $\mathrm{d}f_0 = 0$.

— La matrice symétrique $\mathrm{Hess}(f)_0$ est inversible.

— La signature de $\mathrm{Hess}(f)_0$ est $(p, n-p)$.

Alors il existe un difféomorphisme $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ de classe $\mathscr{C}^1$ entre deux voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$ $V \subseteq U$ et W tel que $\varphi(0) = 0$ et

$$\forall x \in U,\ f(x) - f(0) = \sum_{k=1}^{p} \phi_k^2(x) - \sum_{k=p+1}^{n} \phi_k^2(x)$$

Démonstration. On écrit la formule de Taylor à l'ordre 1 avec reste intégral au voisinage de 0, qui donne :

$$\begin{aligned} & f(x) = f(0) + \mathrm{d}f_0(x) + \int_0^1 (1-t)\mathrm{d}^2(1-t)f_{tx}(x,x)\,\mathrm{d}t \\ \iff & f(x) - f(0) = {}^t x Q(x) x \end{aligned} \tag{$*$}$$

où $Q(x)$ est la matrice symétrique définie par $Q(x) = \int_0^1 (1-t)\mathrm{Hess} f_{tx}\,\mathrm{d}t$ (qui est une application $\mathscr{C}^1$ sur U car f est $\mathscr{C}^3$ sur U).

Par hypothèse, $Q(0) = \frac{\mathrm{Hess}(f)_0}{2}$ est une matrice symétrique inversible, donc en vertu du Lemme 2, il existe un voisinage V_1 de $Q(0)$ dans $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et une application $\psi : V_1 \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathscr{C}^1$ tels que :

$$\forall A \in V_1,\ Q(0) = \psi(A) Q(0) \psi(A)$$

Mais, l'application $x \mapsto Q(x)$ est continue sur U (puisque f est de classe $\mathscr{C}^3$ sur U), donc il existe V_2 voisinage de 0 dans U tel que $\forall x \in V_2,\ Q(x) \in V_1$. On peut donc définir l'application $M = \psi \circ Q_{|V_2}$, qui nous permet d'écrire

$$\forall x \in V_2,\ Q(x) = {}^t M(x) Q(0) M(x) \tag{$*$}$$

Or, $Q(0)$ est de signature $(p, n-p)$, donc d'après la loi d'inertie de Sylvester, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$Q(0) = {}^t P \underbrace{\begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_{n-p} \end{pmatrix}}_{=D} P \tag{$***$}$$

Finalement en combinant $(*)$ avec $(**)$ et $(***)$, cela donne

$$\begin{aligned} & \forall x \in V_2,\ f(x) - f(0) = {}^t(PM(x)x) D (PM(x)x) \\ \overset{\varphi(x) = PM(x)x}{\iff} & \forall x \in V_2,\ f(x) - f(0) = {}^t\varphi(x) D \varphi(x) \end{aligned}$$

ce qui est bien l'expression voulue.

Il reste à montrer que φ définit bien un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$ entre deux voisinages de l'origine. Notons déjà que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ car M l'est. Calculons la différentielle en 0 de φ. Soit

$h \in V_2$;

$$\begin{aligned}\varphi(h) - \varphi(0) &= PM(h)h \\ &= P(M(0) + \mathrm{d}M_0(h) + o(\|h\|))h \\ &= PM(0)h + o(\|h\|)\end{aligned}$$

d'où $\mathrm{d}\varphi_0(h) = PM(0)h$. Or, $PM(0)$ est inversible, donc en particulier, $\mathrm{d}\varphi_0(h)$ l'est aussi. On peut appliquer le théorème d'inversion locale à φ, qui donne l'existence de deux ouverts V et W contenant l'origine (car $\varphi(0) = 0$) tel que $\phi = \varphi_{|V}$ soit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de V sur W. □

p. 341

Application 4. Soit S la surface d'équation $z = f(x,y)$ où f est de classe $\mathscr{C}^3$ au voisinage de l'origine. On suppose la forme quadratique $\mathrm{d}^2 f_0$ non dégénérée. Alors, en notant P le plan tangent à S en 0 :

(i) Si $\mathrm{d}^2 f_0$ est de signature $(2,0)$, alors S est au-dessus de P au voisinage de 0.

(ii) Si $\mathrm{d}^2 f_0$ est de signature $(0,2)$, alors S est en-dessous de P au voisinage de 0.

(iii) Si $\mathrm{d}^2 f_0$ est de signature $(1,1)$, alors S traverse P selon une courbe admettant un point double en $(0, f(0))$.

Démonstration. Une équation cartésienne de P est donnée par

$$z - 0 = f(0) + \mathrm{d}f_0(x,y)$$

La différence d'altitude entre la surface S et le plan tangent P au point $h \in \mathbb{R}^2$ est donc donnée par

$$\delta(h) = f(h) - (f(0) + \mathrm{d}f_0(h))$$

et le Lemme 3 permet d'écrire

$$\delta(h) = \alpha\phi_1(h)^2 + \beta\phi_2(h)^2$$

où (α,β) désigne la signature de $\mathrm{d}^2 f_0$ et $\phi = (\phi_1,\phi_2)$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^2$. En particulier, ϕ_1 et ϕ_2 ne s'annulent simultanément qu'en 0.

(i) Si $\mathrm{d}^2 f_a$ est de signature $(2,0)$, on a $\delta(h) > 0$ pour h voisin de 0 et $h \neq 0$.

(ii) Si $\mathrm{d}^2 f_a$ est de signature $(0,2)$, on a $\delta(h) < 0$ pour h voisin de 0 et $h \neq 0$.

(iii) Si $\mathrm{d}^2 f_a$ est de signature $(1,1)$, on a $\delta(h) = \phi_1(h)^2 - \phi_2(h)^2$ et S traverse P selon une courbe admettant un point double en $(0, f(0))$.

□

18 Loi d'inertie de Sylvester

Le but de ce développement est de montrer la très connue loi d'inertie de Sylvester qui donne l'existence (et une forme d'unicité) de la décomposition d'une forme quadratique réelle en carrés de formes linéaires indépendantes.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie $n \geq 1$. Soit Φ une forme quadratique sur E. [GOU21] p. 243

Notation 1. — On note φ la forme polaire associée à Φ.
— Si Γ est une partie de E^*, on note Γ° son orthogonal (ie. $\Gamma^\circ = \{x \in E \mid \forall f \in \Gamma, f(x) = 0\}$).

Lemme 2. Il existe une base de E qui soit Φ-orthogonale.

Démonstration. On procède par récurrence sur n.

— Si $n = 1$: il n'y a rien à montrer, tout base est Φ-orthogonale.

— On suppose le résultat vrai à un rang $n \geq 1$ et montrons le au rang $n+1$. Si $\Phi = 0$, alors tout base de E est Φ-orthogonale. Sinon, il existe $v \in E$ tel que $\Phi(v) \neq 0$. Dans ce cas, l'application $f = \varphi(v, .)$ est une forme linéaire non nulle sur E.

$H = \mathrm{Ker}(f)$ est un hyperplan de E et comme $v \notin H$, on a $E = H \oplus \mathrm{Vect}(v)$. Or, $\dim(H) = n-1$, donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $\Phi_{|H}$, et on obtient une base $\mathscr{B}$ de H qui est Φ-orthogonale. En particulier, $\mathscr{B} \cup \{v\}$ est une base Φ-orthogonale de E.

□

Théorème 3 (Loi d'inertie de Sylvester)**.**

$$\exists p, q \in \mathbb{N} \text{ et } \exists f_1, \dots, f_{p+q} \in E^* \text{ tels que } \Phi = \sum_{i=1}^{p} |f_i|^2 - \sum_{i=p+1}^{q} |f_i|^2$$

où les formes linéaires f_i sont linéairement indépendantes et où $p + q \leq n$. De plus, ces entiers ne dépendent que de Φ et pas de la décomposition choisie.

Le couple (p, q) est la **signature** de Φ et le rang Φ est égal à $p + q$.

Démonstration. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base Φ-orthogonale (dont l'existence est assurée par le Lemme 2). En posant $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i = \Phi(e_i)$, on a

$$\forall x \in E \text{ que l'on écrit } x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n, \ \Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \Phi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |x_i|^2$$

Chaque λ_i est strictement positif, strictement négatif, ou nul. Quitte à les réordonner, on peut supposer

$$\lambda_1, \dots, \lambda_p > 0, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_{p+q} < 0, \text{ et } \lambda_{p+q+1} = \cdots = \lambda_n = 0$$

Pour $i \in [\![1,p]\!]$, on peut écrire $\lambda_i = \omega_i^2$ et pour $i \in [\![p+1,q]\!]$, on peut écrire $\lambda_i = -\omega_i^2$ où les $\omega_i \in \mathbb{R}^*$. On définit :

$$\forall i \in [\![1,q]\!], f_i = \omega_i e_i^*$$

Ainsi définies, les formes linéaires f_i sont linéairement indépendantes et on obtient bien :

$$\Phi = \sum_{i=1}^{p} |f_i|^2 - \sum_{i=p+1}^{q} |f_i|^2 \qquad (*)$$

Reste maintenant à montrer l'indépendance de p et de q vis-à-vis de la décomposition choisie. Soit donc

$$\Phi = \sum_{i=1}^{p'} |g_i|^2 - \sum_{i=p'+1}^{q'} |g_i|^2 \qquad (**)$$

une autre écriture en carrés de formes linéaires indépendantes. Supposons $p' \neq p$ avec par exemple $p' > p$. Complétons $g_1, \dots, g_{p'+q'}$ en une base $g_1, \dots, g_n$ de E^*. Donc, la famille $\Gamma = (f_1, \dots, f_p, g_{p'+1}, \dots, g_n)$ est de cardinal $p + n - p' < n$. Elle ne peut donc pas former une base de E^*. Donc

$$\dim(\Gamma^\circ) = \dim(E^*) - \dim(\Gamma) \geq 1$$

Par conséquent,

$$\exists x \neq 0 \text{ tel que } f_1(x) = \cdots = f_p(x) = g_{p'+1}(x) = \cdots = g_n(x) = 0$$

Donc $\Phi(x) \leq 0$ par $(*)$. Supposons par l'absurde que

$$g_1(x) = \cdots = g_{p'}(x) = 0$$

Comme $(g_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une base de E^* et que x s'annule sur cette base, on a $x = 0$: c'est absurde. Donc, il existe $i \in [\![1,p']\!]$ tel que $g_i(x) \neq 0$. En particulier $\Phi(x) > 0$ par $(**)$: contradiction. Ainsi, $p = p'$. On montre de même que $q = q'$.

Dans la base Φ-orthogonale $(e_1, \dots, e_n)$, la matrice de Φ est

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où le rang de Φ. □

> *Remarque* 4. La preuve de **[GOU21]** est un peu décousue. Il faut savoir recoller les morceaux pour bien montrer existence et "unicité" de la décomposition.

19 Méthode de Newton

On démontre ici la méthode de Newton qui permet de trouver numériquement une approximation précise d'un zéro d'une fonction réelle d'une variable réelle.

[ROU] p. 152

Théorème 1 (Méthode de Newton)**.** Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ strictement croissante sur $[c,d]$. On considère la fonction

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [c,d] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{array}$$

(qui est bien définie car $f' > 0$). Alors :

(i) $\exists! a \in [c,d]$ tel que $f(a) = 0$.

(ii) $\exists \alpha > 0$ tel que $I = [a-\alpha, a+\alpha]$ est stable par φ.

(iii) La suite (x_n) des itérés (définie par récurrence par $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ pour tout $n \geq 0$) converge quadratiquement vers a pour tout $x_0 \in I$.

Démonstration. Soit $x \in [c,d]$. Comme $f(a) = 0$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \varphi(x) - a &= x - a - \frac{f(x) - f(a)}{f'(x)} \\ &= \frac{f(a) - f(x) - (a-x)f'(x)}{f'(x)} \end{aligned}$$

Or, la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 donne l'existence d'un $z \in]a,x[$ tel que

$$\begin{aligned} & f(a) = f(x) + f'(x)(a-x) + \frac{1}{2} f''(z)(a-x)^2 \\ \iff & f(a) - f(x) - f'(x)(a-x) = \frac{1}{2} f''(z)(a-x)^2 \end{aligned}$$

D'où :

$$\varphi(x) - a = \frac{f''(z)}{2f'(x)}(x-a)^2 \qquad (*)$$

Soit $C = \frac{\max_{x\in[c,d]} |f''(x)|}{2\min_{x\in[c,d]} |f'(x)|}$. Par $(*)$, on a :

$$\forall x \in [c,d],\ |\varphi(x) - a| \leq C|x-a|^2$$

Soit maintenant $\alpha > 0$ suffisamment petit pour que $C\alpha < 1$ et que $I = [a-\alpha, a+\alpha] \subseteq [c,d]$. Alors :

$$x \in I \implies |\varphi(x) - a| \leq C\alpha^2 < \alpha$$

(la première inégalité se voit en faisant un dessin, et la seconde vient du fait que $C\alpha < 1$). D'où

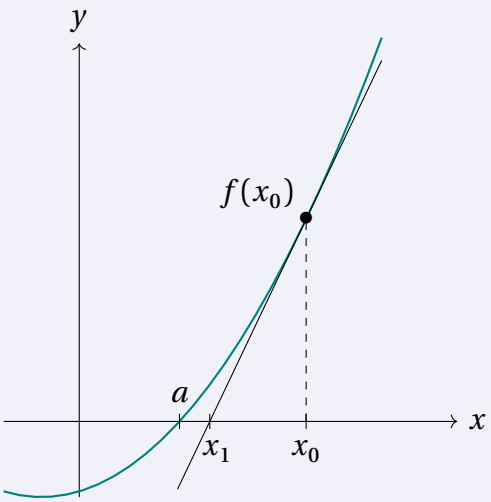
$\varphi(I) \subseteq I$. Et si $x_0 \in I$, on a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in I$ et

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - a| &= |\varphi(x_n) - a| \\ &\leq C|x_n - a|^2 \end{aligned}$$

D'où $c|x_n - a| \leq (C|x_0 - a|)^{2^n} \leq (C\alpha)^{2^n}$ où $C\alpha < 1$. On a donc bien convergence quadratique de la suite (x_n) vers le réel a. □

Remarque 2. On suppose que l'on connaisse une approximation grossière du point que l'on nomme x_0.

[DEM] p. 100



L'idée de la méthode est de remplacer la courbe représentative de f par sa tangente au point x_0 :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

L'abscisse x_1 du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses est donnée par

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

d'où le fait d'itérer la fonction $\varphi : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Corollaire 3. En reprenant les hypothèses et notations du théorème précédent, et en supposant de plus f strictement convexe sur $[c,d]$, le résultat du théorème est vrai sur $I = [a,d]$. De plus :

(i) (x_n) est strictement décroissante (ou constante).

(ii) $x_{n+1} - a \sim \frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n - a)^2$ pour $x_0 > a$.

[ROU] p. 152

Démonstration. La dérivée f' est strictement croissante (car f est strictement convexe) sur $]c,d[$. Ainsi, soit $x \in [a,d]$. Si $x = a$, on a $\varphi(x) = x$, et la suite (x_n) est alors constante. Supposons

maintenant $x > a$. On a :

$$\varphi(x) = x - \frac{\overbrace{f(x)}^{>0}}{\underbrace{f'(x)}_{>0}} < x$$

Et par $(*)$ (de la démonstration précédente), $\exists z \in]a, x[$:

$$\varphi(x) - a = \frac{f''(z)}{2f'(z)}(x-a)^2 > 0 \iff \varphi(x) < a$$

Ainsi, $I = [a, d]$ est stable par φ et pour $x_0 \in]a, d]$, on a $x_n \in]a, d]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la suite (x_n) est strictement décroissante. La suite (x_n) admet donc une limite ℓ vérifiant $\varphi(\ell) = \ell \iff f(\ell) = 0$ ie. $\ell = a$ par unicité. Comme dans le théorème précédent, la convergence est quadratique :

$$0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2$$

Enfin, si $x_0 \in]a, d]$, on a comme dans $(*)$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n > a \text{ et } \frac{x_{n+1} - a}{(x_n - a)^2} = \frac{f''(z_n)}{f'(z)}$$

(en faisant la même démarche que pour $(*)$ on obtient $z_n \in]a, x_n[$). On fait tendre n vers l'infini et la fraction de droite tend vers $\frac{f''(a)}{f'(a)}$; d'où le résultat. □

Remarque 4. L'ajout de l'hypothèse de convexité à la méthode de Newton, nous permet de nous affranchir de l'intervalle I tout en gardant la même vitesse de convergence.

20 Nombres de Bell

En utilisant les propriétés des séries entières, nous calculons le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1,n]\!]$.

Théorème 1 (Nombres de Bell)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n le nombre de partitions de $[\![1,n]\!]$. Par convention on pose $B_0 = 1$. Alors,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, B_k = \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^k}{n!}$$

[GOU21] p. 314

Démonstration. Notons que clairement $B_1 = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, exprimons B_{n+1} en fonction des termes précédents. Pour tout $k \leq n$, on note E_k l'ensemble des partitions P de $[\![1,n+1]\!]$ tel que la partie de P qui contient l'entier $n+1$ est de taille $k+1$. Choisir P dans E_k, c'est choisir k entiers de $[\![1,n]\!]$ (ceux de la partition de P qui contient $n+1$), puis construire une partition des $n-k$ éléments restants. Donc $|E_k| = \binom{n}{k}B_{n-k}$.Comme $E_0,\dots,E_n$ forment une partition de l'ensemble des partitions de $[\![1,n+1]\!]$, on obtient :

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}B_k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k \qquad (*)$$

À toute partition P de $[\![1,n]\!]$, on peut associer une permutation $\sigma_P \in S_n$, qui est le produit des cycles de chaque partition de P. On construit ainsi une application

$$\begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] & \to & S_n \\ P & \mapsto & \sigma_P \end{array}$$

injective. D'où :

$$B_n = |[\![1,n]\!]| \leq |S_n| = n!$$

On en déduit en particulier que $\frac{B_n}{n!} \leq 1$. En vertu du lemme d'Abel, le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{B_n}{n!}x^n$ est supérieur ou égal à 1. On peut donc définir

$$B : \begin{array}{ccc}]-R,R[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_n}{n!}x^n \end{array}$$

et en dérivant, $\forall x \in]-R,R[$:

$$\begin{aligned} B'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_{n+1}}{n!}x^n \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k\right)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k}{k!}\frac{1}{(n-k)!}\right)x^n \end{aligned}$$

On reconnaît là le produit de Cauchy suivant :

$$B'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} \right) x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right) = B(x)e^x$$

Reste à résoudre cette équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 :

$$B(x) = \lambda e^{e^x}$$

Or, $B(0) = B_0 = 1 = \lambda e^1$. D'où $B(x) = \frac{1}{e} e^{e^x}$.La série entière définissant l'exponentielle a un rayon de convergence infini. On peut donc écrire, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$e^{e^z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{nz}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{(nz)^k}{n!k!}}_{u_{n,k}(z)}$$

On va appliquer le théorème de Fubini-Lebesgue à $u_{n,k}(z)$ (où $z \in \mathbb{C}$ est fixé) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} |u_{n,k}(z)| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{n|z|}}{n!} = e^{e|z|} < +\infty$$

Donc on peut intervertir les signes de sommations. Pour tout $x \in]-R, R[$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{e} e^{e^x} \\ &= \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k}(x) \\ &= \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k}(x) \\ &= \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!} \right) \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière d'une fonction, on en déduit, par identification des coefficients :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^k}{n!}$$

□

Remarque 2. La partie sur le dénombrement (au début de la preuve) est un peu technique. N'hésitez pas à passer du temps dessus et à y réfléchir en faisant des exemples.

21 Optimisation dans un Hilbert

On prouve l'existence d'un minimum pour certains types de fonctions définies sur des espaces de Hilbert en utilisant les théorèmes hilbertiens classiques.

Soit H un espace de Hilbert réel de norme $\|.\|$ et dont on note $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire associé.

[I-P] p. 336

Théorème 1. Soit $J : H \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, continue et vérifiant

$$\forall (x_k) \in H^{\mathbb{N}} \text{ telle que } \|x_k\| \longrightarrow_{k\to+\infty} +\infty \text{ alors } J(x_k) \longrightarrow_{k\to+\infty} +\infty$$

Alors, il existe $a \in H$ tel que

$$J(a) = \inf_{h\in H} J(h)$$

Démonstration. Soit (x_k) une suite d'éléments de H telle que $(J(x_k))$ converge vers $\inf_{h\in H} J(h)$. Supposons par l'absurde que (x_k) n'est pas bornée. Il existe alors une extractrice φ telle que

$$\|x_{\varphi(k)}\| \longrightarrow_{k\to+\infty} +\infty$$

Or, par hypothèse, ceci entraîne $J(x_k) \longrightarrow_{k\to+\infty} +\infty$: absurde. On en déduit que (x_k) est bornée. Il existe alors $C > 0$ tel que $\|x_k\| \leq C$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On considère la suite $(\langle x_0, x_k \rangle)$. Elle est bornée car

$$|\langle x_0, x_k \rangle| \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|x_0\| \|x_k\|$$

donc, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une extractrice φ_0 telle que la suite $(\langle x_0, x_{\varphi_0(k)} \rangle)$ converge. Par récurrence, supposons avoir construit $\varphi_0, \dots, \varphi_i$ des extractrices telles que $(\langle x_0, x_{\varphi_0,\dots,\varphi_i(k)} \rangle))$ converge. Comme précédemment, la suite $(\langle x_{i+1}, x_{\varphi_0,\dots,\varphi_i(k)} \rangle))$ est bornée. On en déduit, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, qu'il existe une extractrice φ_{i+1} telle que $(\langle x_{i+1}, x_{\varphi_0,\dots,\varphi_{i+1}(k)} \rangle))$ converge. On crée donc comme cela une suite d'extractrices (φ_i). On définit alors

$$\varphi : k \mapsto \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_k(k)$$

et on a la convergence de $(\langle x_i, x_{\varphi(k)} \rangle)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ car $(\varphi(k))$ est une suite extraite de $(\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_k(k))$. On pose maintenant $F = \text{Vect}(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Par linéarité, $(\langle v, x_{\varphi(k)} \rangle)$ converge pour tout $v \in F$. De plus, comme H est un espace de Hilbert,

$$H = \overline{F} \oplus F^{\perp} \qquad (*)$$

On définit la suite (y_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = x_{\varphi(n)}$$

Montrons que pour tout $u \in H$, la suite $(\langle u, y_k \rangle)$ converge. Soient $u \in H$ et $\epsilon > 0$. Par $(*)$,

$$\exists (v, w) \in \overline{F} \times F^{\perp} \text{ tel que } u = v + w$$

ainsi que $\widetilde{v} \in F$ tel que $\|v - \widetilde{v}\| \leq \epsilon$. Pour tout k, l entiers, on a :

$$|\langle u, y_k - y_l\rangle| = |\langle v, y_k - y_l\rangle| \leq \|v - \widetilde{v}\| \|y_k - y_l\| + \langle \widetilde{v}, y_k - y_l\rangle$$

Comme la suite $(\langle \widetilde{v}, y_k\rangle)$ converge, elle est de Cauchy. Il existe donc un entier N tel que pour tout $k, l \geq N$, $|\langle \widetilde{v}, y_k - y_l\rangle| \leq \epsilon$. Ainsi, pour tout $k, l \geq N$,

$$\begin{aligned} |\langle u, y_k - y_l\rangle| &\leq \|v - \widetilde{v}\| \|y_k - y_l\| + \langle \widetilde{v}, y_k - y_l\rangle \\ &\leq \epsilon(\|y_k\| + \|y_l\|) + \epsilon \\ &\leq \epsilon 2C + \epsilon \end{aligned}$$

On en déduit que $(\langle u, y_k\rangle)$ est une suite de Cauchy réelle, donc est convergente vers une limite $\ell_u \in \mathbb{R}$. On définit

$$\psi : u \mapsto \ell_u$$

par linéarité de $u \mapsto \langle u, y_k\rangle$ et par unicité de la limite, ψ est une forme linéaire. Comme (x_k) est bornée, on a

$$|\psi(u)| \overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} C\|u\|$$

ce qui implique la continuité de ψ. On peut appliquer le théorème de représentation de Riesz, qui donne l'existence d'un unique $a \in H$ tel que

$$\forall u \in H, \psi(u) = \langle a, u\rangle$$

Ainsi, pour tout $u \in H$, la suite $(\langle u, y_k\rangle)$ converge vers $\langle u, a\rangle$.

Il reste à montrer que le minimum de J sur H est bien atteint en a. Soit $\beta > \inf_{h\in H} J(h)$. On définit

$$C_\beta = \{x \in H \mid J(x) \leq \beta\}$$

C'est un convexe fermé, non vide de H, et par le théorème de projection sur un convexe fermé, on peut définir la projection orthogonale $p_\beta : H \to C_\beta$. Comme $(J(x_k))$ converge vers $\inf_{h\in H} J(h)$, $J(y_k)$ aussi. Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq N$, $y_k \in C_\beta$. Donc, d'après la caractérisation angulaire de la projection orthogonale,

$$\langle y_k - p_\beta(a), a - p_\beta(a)\rangle \leq 0$$

Or, $(\langle y_k, a - p_\beta(a)\rangle)$ converge vers $\langle a, a - p_\beta(a)\rangle$, donc en déduit que $\|a - p(a)\|^2 \leq 0$. Ce qui aboutit à $a = p_\beta(a)$ et $a \in C_\beta$. Ainsi, $J(a) \leq \beta$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\beta > \inf_{h\in H} J(h)$. On en déduit que $J(a) = \inf_{h\in H} J(h)$. □

22 Projection sur un convexe fermé

On montre le théorème de projection sur un convexe fermé dans un espace de Hilbert réel en utilisant les suites de Cauchy et des propriétés du produit scalaire.

Soit H un espace de Hilbert réel de norme $\|.\|$ et dont on note $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire associé.

Lemme 1 (Identité du parallélogramme)**.** Soient $x, y \in H$. Alors :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

[LI] p. 32

Démonstration. D'une part,

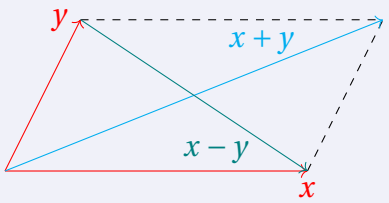
$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$$

D'autre part,

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle$$

En additionnant les deux lignes, on obtient bien l'égalité voulue. □

Remarque 2. L'interprétation géométrique de cette égalité est que dans le parallélogramme formé par les vecteurs x et y, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés.



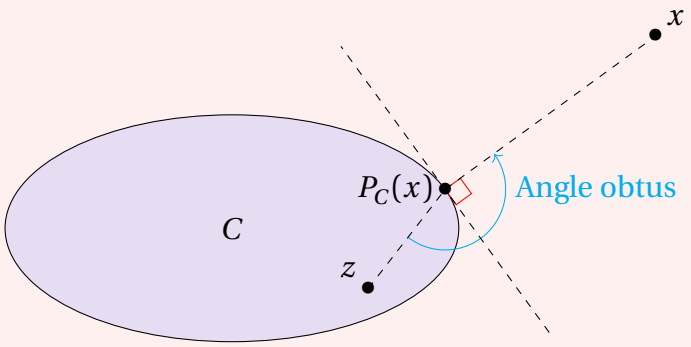
Théorème 3 (Projection sur un convexe fermé)**.** Soit $C \subseteq H$ un convexe fermé non-vide. Alors :

$$\forall x \in H, \exists! y \in C \text{ tel que } d(x,C) = \inf_{z \in C} \|x-z\| = d(x,y)$$

[GOU20] p. 427

On peut donc noter $y = P_C(x)$, le **projeté orthogonal de** x **sur** C. Il s'agit de l'unique point de C vérifiant

$$\forall z \in C, \langle x - P_C(x), z - P_C(x)\rangle \leq 0 \qquad (*)$$



Démonstration. Soit $x \in H$. Posons $\delta = d(x,C)$. Par la caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe (y_n) une suite de C telle que $\|x-y_n\| \longrightarrow \delta$. Montrons que (y_n) est une suite de Cauchy. On applique le Lemme 1 :

$$\forall p,q \in \mathbb{N},\ \|(x-y_p)+(x-y_q)\|^2 + \|y_p-y_q\|^2 = 2(\|x-y_p\|^2 + \|x-y_q\|^2) \qquad (**)$$

Or, C est convexe. Donc $\forall p,q \in \mathbb{N},\ \frac{y_p+y_q}{2} \in C$.Par définition,

$$\begin{aligned} &\left\| x - \frac{y_p+y_q}{2} \right\| \geq \delta \\ \iff &\frac{1}{2}\|(x-y_p)+(x-y_q)\| \geq \delta \\ \iff &\|(x-y_p)+(x-y_q)\|^2 \geq 4\delta^2 \end{aligned}$$

Par $(**)$, quand $p,q \longrightarrow +\infty$:

$$\|y_p-y_q\| \leq 2((\underbrace{\|x-y_p\|^2}_{\longrightarrow \delta^2} - \delta^2) + (\underbrace{\|x-y_q\|^2}_{\longrightarrow \delta^2} - \delta^2)) \longrightarrow 0$$

Ainsi (y_n) est une suite de Cauchy de H qui est complet, donc (y_n) converge vers $y \in H$. Mais, C est fermé et (y_n) est une suite de C, donc $y \in C$.

Montrons maintenant que y est unique. Soit $z \in C$ tel que $\delta = d(x,C)$. On définit la suite (z_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = \begin{cases} y & \text{si } n \text{ est pair} \\ z & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Cette suite vérifie $\forall n \in \mathbb{N},\ \|x-y_n\| = \delta$ donc en particulier $\|x-y_n\| \longrightarrow \delta$, et on peut tout-à-fait refaire le raisonnement précédent pour montrer que (z_n) converge (vers $y=z$, donc). Ainsi, on a bien existence et unicité du projeté.

Soit $y \in C$ vérifiant $(*)$. Montrons que $y = P_C(x)$. $\forall z \in C$,

$$\begin{aligned} \|z-x\|^2 &= \|(z-y)-(x-y)\|^2 \\ &= \|z-y\|^2 + \|x-y\|^2 - 2\langle z-y, x-y\rangle \\ &\geq \|z-y\|^2 + \|x-y\|^2 \\ &\geq \|x-y\|^2 \end{aligned}$$

ie. $\|z-x\| \geq \|x-y\|$. De plus, $y \in C$, donc $d(y,C) = d(x,C)$. D'où $y = P_C(x)$.

Montrons maintenant que $P_C(x)$ vérifie bien $(*)$. Et $\forall z \in C$, on a

$$\|x-z\|^2 \geq \|x-P_C(x)\|^2$$

Or, en développant :

$$\begin{aligned}\|x-z\|^2 &= \|(x-P_C(x))-(z-P_C(x))\|^2\\ &= \|x-P_C(x)\|^2+\|z-P_C(x)\|^2-2\langle x-P_C(x),z-P_C(x)\rangle\\ &\geq \|x-P_C(x)\|^2\end{aligned}$$

D'où,

$$\|z-P_C(x)\|^2-2\langle x-P_C(x),z-P_C(x)\rangle\geq 0 \qquad (***)$$

Soit maintenant $z_0\in C$. On va appliquer $(***)$ à $z=\lambda z_0+(1-\lambda)z_0\in C$ pour $\lambda\in]0,1]$:

$$\begin{aligned}&\lambda^2\|z_0+P_C(x)\|^2-2\lambda\langle x-P_C(x),z_0-P_C(x)\rangle\geq 0\\ \Longrightarrow\ &\lambda\|z_0+P_C(x)\|^2-2\langle x-P_C(x),z_0-P_C(x)\rangle\geq 0\\ \overset{\lambda\longrightarrow 0}{\Longrightarrow}\ &-2\langle x-P_C(x),z_0-P_C(x)\rangle\geq 0\end{aligned}$$

ce que l'on voulait. □

Remarque 4. $(*)$ traduit le fait géométrique que l'angle du vecteur $\overrightarrow{P_C(x)x}$ avec $\overrightarrow{P_C(x)z}$ est obtus pour tout $z\in C$. En effet, en notant cet angle θ, on a pour $z\in C$:

$$\langle x-P_C(x),z-P_C(x)\rangle=\|x-P_C(x)\|\,\|z-P_C(x)\|\cos(\theta)$$

et si θ est obtus, on a bien $\cos(\theta)\leq 0$.

Corollaire 5. Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H. Alors $F\oplus F^\perp=H$.

Démonstration. Si $x\in F\cap F^\perp$, alors $\|x\|=\langle x,x\rangle=0$, et donc $x=0$. Montrons maintenant que $F+F^\perp=H$. Soit $x\in H$. Comme F est un convexe fermé de H (en tant que sous-espace vectoriel fermé), on peut appliquer le Théorème 3. Ainsi, il existe un unique $P_F(x)\in F$ tel que $d(x,F)=d(x,P_F(x))$ et

$$\forall z\in F,\ \langle x-P_F(x),z-P_F(x)\rangle\leq 0 \qquad (*)$$

Soit $z_0\in F$. on peut appliquer $(*)$ à $z=z_0$:

$$\langle x-P_F(x),z_0-P_F(x)\rangle\leq 0$$

On va également appliquer $(*)$ à $z=-z_0+2P_F(x)\in F$:

$$\langle x-P_F(x),-z_0+P_F(x)\rangle\leq 0\iff\langle x-P_F(x),z_0-P_F(x)\rangle\geq 0$$

Ce qui montre que l'inégalité de $(*)$ est en fait une égalité. On en tire :

$$\forall z\in F,\ \langle x-P_F(x),z\rangle=\langle x-P_F(x),z-P_F(x)\rangle-\langle x-P_F(x),0-P_F(x)\rangle=0$$

donc $x - P_F(x) \in F^\perp$. En conclusion, on a :

$$x = \underbrace{P_F(x)}_{\in F} + \underbrace{x - P_F(x)}_{\in F^\perp} \in F + F^\perp$$

et on a donc bien la somme directe $H = F \oplus F^\perp$. □

23 Simplicité de A_n pour $n \geq 5$

On montre que A_n est simple pour $n \geq 5$ en montrant dans un premier temps le cas $n = 5$, puis en s'y ramenant.

Lemme 1. Les 3-cycles sont conjugués dans A_n pour $n \geq 5$.

[PER] p. 15

Démonstration. Soient $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$ et $\beta = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ deux 3-cycles. Soit $\sigma \in S_n$ telle que

$$\forall i \in [\![1,3]\!], \sigma(a_i) = b_i$$

On a deux possibilités pour σ :

— σ est paire. Alors $\sigma \in A_n$, et le résultat est démontré pour α et β.

— σ est impaire. Comme $n \geq 5$, il existe c_1, c_2 tels que $c_1, c_2 \notin \{b_1, b_2, b_3\}$. On pose alors $\tau = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix}$, et on a

$$(\tau\sigma)\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}(\tau\sigma)^{-1} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

avec $\tau\sigma$ paire. Le résultat est encore démontré pour α et β.

□

Lemme 2. Le produit de deux transpositions est un produit de 3-cycles.

[ROM21] p. 49

Démonstration. Soient $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}$ et $\beta = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ deux transpositions. Si $\alpha = \beta$, alors $\alpha\beta = \mathrm{id} = \sigma^3$ où σ désigne n'importe quel 3-cycle.

Si $\alpha \neq \beta$, on a deux possibilités :

— Leur support comporte un élément commun : $a_1 = b_1 = c$. Donc $\alpha = \begin{pmatrix} c & a_2 \end{pmatrix}$ et $\beta = \begin{pmatrix} c & b_2 \end{pmatrix}$ avec c, a_2, b_2 distincts. Donc $\alpha\beta = \begin{pmatrix} a_2, c, b_2 \end{pmatrix}$.

— Leur support n'a pas d'élément commun. Dans ce cas a_1, a_2, a_1, b_2 sont distincts et $\alpha\beta = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_1 & b_2 \end{pmatrix}$.

□

Lemme 3. A_n est engendré par les 3-cycles pour $n \geq 3$.

Démonstration. Soit $\sigma \in A_n$. Comme σ est paire, on peut la décomposer en un produit d'un nombre pair n de transpositions :

$$\sigma = \prod_{i=1}^{n-1} \tau_i \tau_{i+1}$$

Par le Lemme 1, chaque produit $\tau_i\tau_{i+1}$ peut s'écrire comme un produit de 3-cycles. Donc σ est bien un produit de 3-cycles. □

p. 66

Lemme 4. A_5 est simple.

Démonstration. Commençons par décrire les types possibles des permutations de A_5 (le "type" d'une permutation désigne les cardinaux des supports des cycles apparaissant dans sa décomposition en cycles disjoints).

Type de permutation	**Nombre de permutations**
$[1]$	1
$[3]$	$\frac{5\times4\times3}{3} = 20$
$[5]$	$\frac{5\times4\times3\times2\times1}{5} = 24$
$[2,2]$	$\frac{1}{2}\frac{5\times4\times3\times2}{4} = 15$

Montrons que les permutations de type $[2,2]$ sont conjuguées dans A_5. Soient $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \end{pmatrix}$ et $\beta = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_2 & d_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_2 \end{pmatrix}$ deux permutations de type $[2,2]$. Il suffit de prendre $\sigma \in A_5$ telle que $\sigma(a_1) = a_2$, $\sigma(b_1) = b_2$ et $\sigma(e_1) = e_2$ pour avoir $\sigma\alpha\sigma^{-1} = \beta$.

Soit $H \lhd A_5$ tel que $H \neq \{\mathrm{id}\}$. Montrons que $H = A_5$.

— Si H contient une permutation de type $[2,2]$, alors par le Lemme 2, le Lemme 1, il les contient toutes.

— Si H contient une permutation de type $[3]$, alors par le Lemme 1, il les contient toutes.

— Si H contient une permutation de type $[5]$, $\sigma = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \end{pmatrix}$, il contient alors le commutateur

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}\sigma\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}^{-1}\sigma^{-1} &= \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}\sigma\begin{pmatrix} c & b & a \end{pmatrix}\sigma^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma(c) & \sigma(b) & \sigma(a) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & c & b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b & d & a \end{pmatrix}\end{aligned}$$

qui est un 3-cycle. Par le Lemme 1, il les contient tous.

Or, H ne peut pas vérifier qu'un seul des points précédents en vertu du théorème de Lagrange, car ni $16 = 15+1$, ni $21 = 20+1$ ne divisent $|A_5| = 60$. Donc H vérifie au moins deux des points précédents, et ainsi $|H| \geq 1+15+20 = 36$. Donc $|H| = 60$ et $H = A_5$. □

Si les théorèmes de Sylow sont mentionnés dans le plan, il est préférable de mentionner l'argument suivant.

[PER] p. 28

Remarque 5. Dans le raisonnement précédent, si H contient une permutation de type [5] (qui est donc d'ordre 5), alors H contient le 5-Sylow engendré par cet élément. Or, on sait par les théorèmes de Sylow que les sous-groupes de Sylow sont conjugués entre eux. Donc H contient tous les 5-Sylow et donc contient tous les éléments d'ordre 5.

Théorème 6. A_n est simple pour $n \geq 5$.

Démonstration. Soit $N \lhd A_n$ tel que $N \neq \{\mathrm{id}\}$. L'idée générale de la démonstration et de se ramener au cas $n = 5$ à l'aide d'une permutation bien spécifique.

Soit $\sigma \in N \setminus \{\mathrm{id}\}$, il existe donc $a \in [\![1, n]\!]$ tel que $\sigma(a) = b \neq a$. Soit $c \in [\![1, n]\!]$ différent de a, b et $\sigma(b)$. On pose $\tau = \begin{pmatrix} a & c & b \end{pmatrix} \in A_n$ (on a $\tau^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$). Soit $\rho = \tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1}$. Par calcul :

$$\rho = \begin{pmatrix} a & c & b \end{pmatrix}\sigma\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} a & c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma(a) & \sigma(b) & \sigma(c) \end{pmatrix}$$

Notons bien que $\rho \neq \mathrm{id}$ (en tant que produit de 3-cycles, car $\sigma(b) \neq c$). Or, $\tau\sigma\tau^{-1} \in N$ car N est distingué et σ^{-1} aussi car N est un groupe, donc $\rho \in N$.

Notons $\mathscr{F} = \{a, b, c, \sigma(a), \sigma(b), \sigma(c)\}$. Comme $\sigma(a) = b$, $|\mathscr{F}| \leq 5$. Quitte à rajouter, au besoin, des éléments à $\mathscr{F}$, on peut supposer que $|\mathscr{F}| = 5$. On pose

$$A(\mathscr{F}) = \{\alpha \in A_n \mid \forall i \in [\![1, n]\!] \setminus \mathscr{F},\ \alpha(i) = i\}$$

le sous-groupe de A_n contenant les éléments qui laissent fixes $[\![1, n]\!] \setminus \mathscr{F}$. Si on pose $\mathscr{F} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, on a une bijection entre $\mathscr{F}$ et $[\![1, 5]\!]$:

$$\begin{aligned} \mathscr{F} &\to [\![1, 5]\!] \\ a_i &\mapsto i \end{aligned}$$

Donc $A(\mathscr{F})$ et A_5 sont deux groupes isomorphes (en effet, une permutation n'agissant que sur $\mathscr{F}$ peut s'identifier à une permutation n'agissant que sur $[\![1, 5]\!]$). De plus, par le Lemme 4, comme A_5 est simple, $A(\mathscr{F})$ l'est aussi.

Soit $N_0 = N \cap A(\mathscr{F})$. $N_0 \lhd A(\mathscr{F})$, en effet, soient $\alpha \in N_0$ et $\beta \in A(\mathscr{F})$:

— $\beta\alpha\beta^{-1} \in A(\mathscr{F})$ car $A(\mathscr{F})$ est un groupe.

— $\beta\alpha\beta^{-1} \in N$ car $N \lhd A_5$.

En particulier, N_0 est distingué dans $A(\mathscr{F})$ qui est simple. De plus, $\rho \in N_0$ (car $\mathrm{Supp}(\rho) \subseteq \mathscr{F}$ et $\epsilon(\rho) = (-1)^6 = 1$ donc $\rho \in A(\mathscr{F})$ et par 1., $\rho \in N$). Donc $N_0 \neq \{\mathrm{id}\}$, et ainsi $N_0 = A(\mathscr{F})$. On en déduit :

$$A(\mathscr{F}) = N \cap A(\mathscr{F}) \qquad (*)$$

Finalement, τ est un 3-cycle qui n'agit que sur $\mathscr{F}$, donc $\tau \in A(\mathscr{F})$ et par $(*)$, $\tau \in N$. Or, τ est un 3-cycle et les 3-cycles sont conjugués dans A_n (par le Lemme 1) donc N contient tous les 3-cycles. Et comme ceux-ci engendrent A_n (par le Lemme 3), on a $N = A_n$. □

24 Suite de polygones

Il s'agit ici d'étudier une suite de polygones à l'aide de déterminants classiques, et de montrer qu'elle converge vers l'isobarycentre du polygone de départ.

Lemme 1 (Déterminant circulant)**.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Alors

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} P(\omega^j)$$

où $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

[GOU21] p. 153

Démonstration. On définit

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ et } \Omega = (\omega^{(i-1)(j-1)})_{i,j\in[\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

Pour $i \geq 2$, la i-ième ligne de A est

$$\begin{pmatrix} a_{n-i+1} & \dots & a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-i-2} \end{pmatrix}$$

Si on multiplie cette ligne par la j-ième colonne de Ω, on obtient le coefficient

$$\begin{aligned} &a_{n-i+1} + a_{n-i+2}\omega^{j-1} + \dots + a_0\omega^{(j-1)(i-1)} + a_1\omega^{(j-1)i} + \dots + a_{n-i-2}\omega^{(j-1)(n-1)} \\ &= \omega^{(j-1)(i-1)}(a_0 + a_1\omega^{j-1} + \dots + a_{n-1}\omega^{(j-1)(n-1)}) \\ &= \omega^{(j-1)(i-1)}P(\omega^{j-1}) \end{aligned}$$

et c'est encore vrai pour $i = 1$ puisque $\omega^0 = 1$. Donc la j-ième colonne de $A\Omega$ est égale à la j-ième colonne de Ω multipliée par $P(\omega^{j-1})$. Ceci entraîne que

$$\det(A)\det(\Omega) = \det(A\Omega) = P(1)P(\omega)\dots P(\omega^{n-1})\det(\Omega)$$

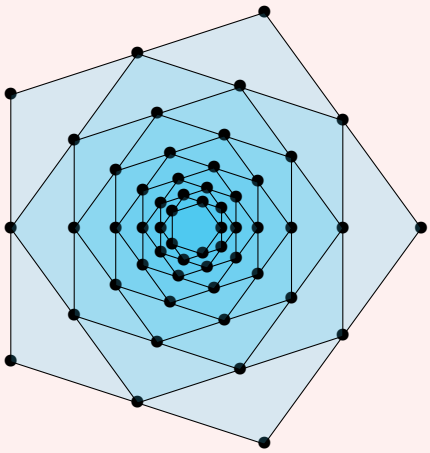
et le déterminant $\det(\Omega)$ est non nul (en tant que déterminant de Vandermonde à paramètres deux-à-deux distincts). D'où :

$$\det(A) = P(1)P(\omega)\dots P(\omega^{n-1})$$

□

[I-P] p. 389

Théorème 2 (Suite de polygones)**.** Soit P_0 un polygone dont les sommets sont $\{z_{0,1},\dots,z_{0,n}\}$. On définit la suite de polygones (P_k) par récurrence en disant que, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, les sommets de P_{k+1} sont les milieux des arêtes de P_k.



Alors la suite (P_k) converge vers l'isobarycentre de P_0.

Démonstration. On identifie P_k au vecteur colonne $Z_k=\begin{pmatrix}z_{k,1}\\ \vdots\\ z_{k,n}\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^n$. Il s'agit de montrer que la suite (Z_k) converge vers $\begin{pmatrix}g\\ \vdots\\ g\end{pmatrix}$ où g désigne l'isobarycentre de P_0.

En utilisant la notation matricielle, la relation de récurrence s'écrit

$$\forall k\in\mathbb{N},\ Z_{k+1}=\begin{pmatrix}\frac{z_{k,1}+z_{k,2}}{2}\\ \vdots\\ \frac{z_{k,n}+z_{k,1}}{2}\end{pmatrix}=AZ_k \text{ où } A=\begin{pmatrix}\frac12&\frac12&0&\dots&0\\ 0&\frac12&\frac12&\ddots&\vdots\\ \vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\ 0&\dots&0&\frac12&\frac12\\ \frac12&0&\dots&0&\frac12\end{pmatrix}$$

Par une récurrence immédiate (c'est une suite géométrique), on a donc $\forall k\in\mathbb{N}, Z_k=A^kZ_0$. Il suffit donc de montrer que (A^k) converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (muni d'une norme quelconque par équivalence des normes en dimension finie).

Pour cela, étudions les valeurs propres de A :

$$\chi_A=\det(A-XI_n)=\begin{vmatrix}a_0&a_1&\dots&a_{n-1}\\ a_{n-1}&a_0&\dots&a_{n-2}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ a_1&a_2&\dots&a_0\end{vmatrix}$$

avec $a_0=\frac12-X$, $a_1=\frac12$ et $\forall i>2$, $a_i=0$. On reconnaît le déterminant circulant du Lemme 1 et en

posant $P(Y) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k Y^k$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, la formule du déterminant circulant nous donne :

$$\chi_A = \prod_{j=1}^{n} P(\omega^j) = \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{kj} \right) = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - X + \frac{1}{2}\omega^j \right) = \prod_{j=1}^{n} (\lambda_j - X)$$

où $\lambda_j = \frac{1+\omega^j}{2}$. Et comme $\lambda_i = \lambda_j \iff i = j$, le polynôme χ_A est scindé à racines simples. Donc $\exists Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = QDQ^{-1}$ et $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.Or pour $j \neq n$,

$$|\lambda_j| = \left| \frac{1+\omega^j}{2} \right| = \left| e^{\frac{ij\pi}{n}} \frac{e^{\frac{ij\pi}{n}} + e^{-\frac{ij\pi}{n}}}{2} \right| = \left| \cos\left(\frac{\pi j}{n} \right) \right| < 1$$

Ainsi, $\lambda_j^k \longrightarrow 0$ si $j < n$, donc la suite (A^k) converge dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ vers la matrice $B = Q\,\mathrm{Diag}(0, \dots, 0, 1)Q^{-1}$ par continuité de l'application $M \mapsto QMQ^{-1}$.

On pose donc $X = BP_0$, de sorte que la suite (Z_k) converge vers X. Par continuité de $M \mapsto AM$, la limite X vérifie forcément $X = AX$ ie. X est vecteur propre de A associé à la valeur propre 1. Or l'espace propre de A associé à la valeur propre 1 contient le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et est de dimension 1 (car χ_A possède n racines distinctes), donc il est engendré par ce vecteur. Ainsi, il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $X = \begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}$ ie. (Z_k) converge vers le point d'affixe a.

Enfin, on remarque que si g est l'isobarycentre de P_0, il est aussi égal à celui de P_k pour tout k (que l'on note g_k) car pour tout $k \geq 1$:

$$g_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} z_{k,i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{k-1,i} + z_{k-1,i+1}}{2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} z_{k-1,i} = g_{k-1}$$

(en considérant les indices i modulo n). Or, la suite (Z_k) converge vers $\begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}$, et la fonction φ qui à n points du plan associe son isobarycentre est continue. Donc,

$$g_k = \varphi(Z_k) \longrightarrow \varphi(a, \dots, a) = a$$

et comme pour tout k, $g_k = g$, on a bien $g = a$. □

25 exp : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est surjective

Dans ce développement, on démontre que l'exponentielle de matrices est surjective en utilisant des théorèmes d'analyse.

Lemme 1. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Alors $M^{-1} \in \mathbb{C}[X]$ (ie. M^{-1} est un polynôme en M).

[I-P] p. 396

Démonstration. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_M(M) = 0$. Or, en notant $\chi_M = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on a $a_0 = (-1)^n \det(M)$, d'où

$$0 = M^n + \cdots + a_1 M + (-1)^n \det(M) I_n$$

En notant $Q = X^{n-1} + a_{n-1}X^{n-2} + \cdots + a_2 X + a_1$, on en déduit que $(-1)^{n+1}\det(M)I_n = Q(M)M$. D'où

$$M^{-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{\det(M)} Q(M) \in \mathbb{C}[M]$$

ce qu'il fallait démonter. □

Lemme 2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors, $\exp(M) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Démonstration. M et $-M$ commutent, donc

$$\exp(M)\exp(-M) = \exp(M - M) = I_n = \exp(-M)\exp(M)$$

Ainsi $\exp(M)$ est inversible, d'inverse $\exp(-M)$. □

Lemme 3. exp est différentiable en 0 et,

$$\mathrm{d}\exp_0 = I_n$$

Démonstration. Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned} \exp(0+H) - \exp(H) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H^k}{k!} \\ &= I_n + H + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{H^k}{k!} \end{aligned}$$

Soit $\|.\|$ une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{H^k}{k!} \right\| &\leq \sum_{k=2}^{+\infty} \left\| \frac{H^k}{k!} \right\| \\ &\leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\|H\|^k}{k!} \end{aligned}$$

Donc,

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\|H\|^k}{k!} = o(\|H\|)$$

ce qui donne le résultat annoncé. □

Théorème 4. exp : $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Démonstration. Fixons $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ pour le reste de la démonstration. Comme $\mathbb{C}[C]$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il est de dimension finie et est donc fermé. En particulier, $\exp(C) \in \mathbb{C}[C]$.

Posons $\mathbb{C}[C]^* = \mathbb{C}[C] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, et montrons que c'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

— $I_n \in \mathbb{C}[C]$ et $I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, donc $I_n \in \mathbb{C}[C]^*$.

— Soit $M \in \mathbb{C}[C]^*$. Comme $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, M^{-1} existe, est inversible, et, par le Lemme 1, $M^{-1} \in \mathbb{C}[C]$.

— Enfin, $\mathbb{C}[C]^*$ est clairement stable par multiplication.

Ainsi, $\mathbb{C}[C]^*$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, ce qui, combiné au Lemme 2, nous dit que exp : $\mathbb{C}[C] \to \mathbb{C}[C]^*$ est bien définie. Il s'agit de plus d'un morphisme de groupes. En effet, $\forall A, B \in \mathbb{C}[C]$, on a $AB = BA$, d'où $\exp(A)\exp(B) = \exp(A+B) = \exp(B)\exp(A)$.

Montrons que $\mathbb{C}[C]^*$ est un ouvert connexe de $\mathbb{C}[C]$. Notons qu'il s'agit bien d'un ouvert de $\mathbb{C}[C]$, car c'est l'intersection de $\mathbb{C}[C]$ avec $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ qui est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Ensuite, soient $A, B \in \mathbb{C}[C]^*$. On pose

$$P = \det((1-X)A + XB)$$

P ne s'annule ni en 0, ni en 1 par inversibilité de A et B. P a un nombre fini de racines car n'est pas nul : on peut trouver une fonction continue $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ qui évite ces racines. Donc,

$$\forall t \in [0,1], \gamma(t) \in \mathbb{C}[C]^*$$

donc $\mathbb{C}[C]^*$ est connexe par arcs, donc est connexe.

Il s'agit maintenant de montrer que $\exp(\mathbb{C}[C]^*)$ est un ouvert-fermé de $\mathbb{C}[C]^*$. Par le théorème d'inversion locale appliqué à exp : $\mathbb{C}[C] \to \mathbb{C}[C]$ (qui est bien $\mathscr{C}^1$ sur l'espace de Banach $\mathbb{C}[C]$ et, par le Lemme 3, $\det(\mathrm{d}\exp_0) \neq 0$) : il existe U un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}(C)$ et un ouvert V de $\mathbb{C}(C)$ contenant $\exp(0) = I_n$ tels que exp : $U \to V$ soit un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$. Soit $A \in \mathbb{C}[C]$. Posons

$$f_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[C] & \to & \mathbb{C}[C] \\ M & \mapsto & \exp(A)^{-1}M \end{array}$$

Pour tout $B \in V$, $f(\exp(A)B) = \exp(A)^{-1}(\exp(A)B) = B \in V$, donc $\exp(A)V \subseteq f^{-1}(V)$. Soit $B \in f^{-1}(V)$, alors $f(B) \in V$. Or, $f(B) = \exp(A)^{-1}B$, donc $B = \exp(A)f(B) \in \exp(A)V$. On en déduit que $\exp(A)V = f^{-1}(V)$ et que $\exp(A)V$ est un ouvert par continuité de f. Comme V contient I_n, $\exp(A)V$ est un voisinage de $\exp(A)$. Or, $\exp(A)V$ est inclus dans $\mathbb{C}[C]$ car pour tout $B \in V$, il existe $M \in \mathbb{C}[C]$ tel que $\exp(M) = B$. Ainsi,

$$\exp(A)B = \exp(A)\exp(M) = \exp(A+M) \in \exp(\mathbb{C}[C])$$

On en déduit que $\exp(\mathbb{C}[C])$ est un ouvert.

Montrons maintenant que

$$\mathbb{C}[C]^* \setminus \exp(\mathbb{C}[C]) = \bigcup_{A \in (\mathbb{C}[C]^* \setminus \exp(\mathbb{C}[C]))} A\exp(\mathbb{C}[C]) \qquad ((*))$$

Soient $A \in \mathbb{C}[C]^* \setminus \exp(\mathbb{C}[C])$ et $B \in \exp(\mathbb{C}[C])$. Alors $AB \in \mathbb{C}[C]^*$. Supposons par l'absurde que $AB \in \exp(\mathbb{C}[C])$. Il existe donc $M \in \exp(\mathbb{C}[C])$ tel que $AB = M$ et $A = MB^{-1}$. Comme $\exp(\mathbb{C}[C])$ est un groupe multiplicatif, alors $A \in \exp(\mathbb{C}[C])$: absurde. On conclut que

$$\bigcup_{A \in \mathbb{C}[C]^* \setminus \exp(\mathbb{C}[C])} A\exp(\mathbb{C}[C]) \subseteq \mathbb{C}[C]^* \setminus \exp(\mathbb{C}[C])$$

Réciproquement, supposons que $M \in \mathbb{C}[C]^* \setminus \exp(\mathbb{C}[C])$. Comme $I_n \in \exp(\mathbb{C}[C])$, alors $M \in M\exp(\mathbb{C}[C])$. On en déduit $(*)$, d'où la fermeture de $\exp(\mathbb{C}[M])$.

$\exp(\mathbb{C}[M])$ est un ouvert fermé non vide (car contient I_n) de $\mathbb{C}[M]^*$, alors $\exp(\mathbb{C}[M]) = \mathbb{C}[M]^*$. Pour conclure, si $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, alors comme $C \in \mathbb{C}[C]$, $C \in \mathbb{C}[C]^*$. Donc $C \in \exp(\mathbb{C}[C])$, et exp est bien surjective. □

Application 5. $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^2$, où $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^2$ désigne les carrés de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors,

$$\exp(M) = \exp\left(\frac{M}{2}\right)^2$$

d'où $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^2$. Réciproquement, soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^2$. Posons $B = A^2$. D'après le Théorème 4,

$$\exists P \in \mathbb{C}[X] \text{ telle que } A = \exp(P(A))$$

Comme A est une matrice réelle, alors en passant au conjugué, on obtient $A = \exp(\overline{P}(A))$. Ainsi,

$$B = A^2 = \exp((P + \overline{P})(A)) \in \exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$$

d'où $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^2 \subseteq \exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. □

26 Théorème central limite

En établissant d'abord le théorème de Lévy, on démontre le théorème central limite, qui dit que si (X_n) est une suite de variables aléatoires identiquement distribuées admettant un moment d'ordre 2, alors $\frac{X_1+\cdots+X_n-n\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,\mathrm{Var}(X_1))$.

Notation 1. Si X est une variable aléatoire réelle, on note ϕ_X sa fonction caractéristique.

Théorème 2 (Lévy)**.** Soient (X_n) une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle. Alors :

$$X_n \xrightarrow{(d)} X \iff \phi_{X_n} \text{ converge simplement vers } \phi_X$$

[Z-Q] p. 544

Démonstration. Sens direct : On suppose que (X_n) converge en loi vers X. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $g_t : x \mapsto e^{itx}$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$. Donc par définition de la convergence en loi :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(g_t(X_n)) = \mathbb{E}(g_t(X))$$

ce que l'on voulait.

Réciproque : Soit $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$, on pose $f = \widehat{\varphi}$. Alors

$$\mathbb{E}(f(X_n)) = \mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{itX_n}\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Comme la fonction $(\omega,t) \mapsto e^{itX_n(\omega)}\varphi(t)$ est intégrable pour la mesure $\mathbb{P}_{X_n}\otimes\lambda$, on peut appliquer le théorème de Fubini-Lebesgue pour intervertir espérance et intégrale :

$$\mathbb{E}(f(X_n)) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}(e^{itX_n})\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

On définit maintenant la suite de fonction $g_n : t \mapsto \mathbb{E}(e^{itX_n})\varphi(t)$. Alors :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, g_n est mesurable.
- La suite de fonction (g_n) converge presque partout vers $g : t \mapsto \mathbb{E}(e^{itX})\varphi(t)$ par hypothèse.
- $\forall n \in \mathbb{N}$ et pp. en $t \in \mathbb{R}$, $|g_n(t)| \leq \mathbb{E}(|e^{itX_n}|)|\varphi(t)| \leq \mathbb{P}_X(\mathbb{R})|\varphi(t)|$ avec $|\varphi| \in L_1(\mathbb{R})$.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée pour obtenir

$$\mathbb{E}(f(X_n)) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}(e^{itX})\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \mathbb{E}(f(X))$$

Ainsi, le résultat est vrai pour toute fonction dans l'image de $L_1(\mathbb{R})$ par la transformée de Fourier. En particulier, il est vrai pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, dense dans $(\mathscr{C}(\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$. Soient maintenant $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$

et (f_k) une suite de fonctions de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ qui converge uniformément vers f. Alors,

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}(f(X_n)) - \mathbb{E}(f(X))| &= |\mathbb{E}(f(X_n)) - \mathbb{E}(f_k(X_n)) + \mathbb{E}(f_k(X_n)) \\ &\quad - \mathbb{E}(f_k(X)) + \mathbb{E}(f_k(X)) - \mathbb{E}(f(X))| \\ &\leq 2\|f - f_k\|_\infty + |\mathbb{E}(f_k(X_n)) - \mathbb{E}(f_k(X))| \\ &\longrightarrow 0\end{aligned}$$

□

Lemme 3. Soient $u, v \in \mathbb{C}$ de module inférieur ou égal à 1 et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$|z^n - u^n| \leq n|z-u|$$

[G-K] p. 307

Démonstration. $|z^n - u^n| = |(z-u)\sum_{k=0}^{n-1} z^k u^{n-1-k}| \leq n|z-u|$. □

Théorème 4 (Central limite)**.** Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi admettant un moment d'ordre 2. On note m l'espérance et σ^2 la variance commune à ces variables. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n - nm$. Alors,

$$\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{(d)} \mathscr{N}(0, \sigma^2)$$

Démonstration. On a $S_n = \sum_{k=1}^n (X_k - m)$. Notons ϕ la fonction caractéristique de $X_1 - m$. Comme les variables aléatoires $X_1 - m, \ldots, X_n - m$ sont indépendantes de même loi, la fonction caractéristique de $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ vaut $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) &= \mathbb{E}\left(e^{iS_n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^n e^{i(X_k-m)\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}\right) \\ &= \prod_{k=1}^n \phi_{X_k-m}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n\end{aligned}$$

D'après le Théorème 2, pour montrer que $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers $\mathscr{N}(0,\sigma^2)$, il suffit de montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \lim_{n\to+\infty} \phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n = e^{-\frac{\sigma^2}{2}t^2}$$

car $t \mapsto e^{-\frac{\sigma^2}{2}t^2}$ est la fonction caractéristique de la loi $\mathscr{N}(0,\sigma^2)$.

Comme X_1 admet un moment d'ordre 2, ϕ est de classe $\mathscr{C}^2$ et

— $\phi(0) = 1$.

— $\phi'(0) = i^1\mathbb{E}(X_1^1) = 0$.

— $\phi''(0) = i^2\mathbb{E}(X_1^2) = -E(X^2) = -\sigma^2$ (car $m = 0$).

Ce qui donne le développement limité en 0 de ϕ à l'ordre 2 (par la formule de Taylor-Young) :

$$\phi(t) = \phi(0) + \frac{\phi'(0)}{1!}(t-0) + \frac{\phi''(0)}{2!}(t-0)^2 + o(t^2) = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + o(t^2) \qquad (*)$$

Et, en appliquant le Lemme 3 :

$$\begin{aligned}\left|\phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n - e^{-\frac{\sigma^2}{2}t^2}\right| &= \left|\phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n - \left(e^{-\frac{\sigma^2}{2n}t^2}\right)^n\right| \\ &\leq n\left|\phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{\sigma^2}{2n}t^2}\right|\end{aligned}$$

On a d'une part, par développement limité :

$$e^{-\frac{\sigma^2}{2n}t^2} = 1 - \frac{\sigma^2}{2n}t^2 + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Et d'autre part, par $(*)$:

$$\phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{\sigma^2}{2n}t^2 + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On obtient ainsi le résultat cherché, à savoir :

$$n\left|\phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - e^{-\frac{\sigma^2}{2n}t^2}\right| = o(1)$$

□

27 Théorème chinois

On montre le théorème chinois et on propose une application à la résolution d'un système de congruences.

Soit A un anneau principal. Soient $r \geq 2$ un entier et $a_1, \dots, a_r \in A$ des éléments premiers entre eux deux à deux. **[ROM21]** p. 250

Notation 1. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on note

$$\pi_i : \pi_{(a_i)} : A \to A/(a_i)$$

la surjection canonique de A sur $A/(a_i)$.

Théorème 2 (Chinois)**.** Alors :

(i) L'application :
$$\varphi : \begin{array}{ccc} A & \to & A/(a_1) \times \cdots \times A/(a_r) \\ x & \mapsto & (\pi_1(x), \dots, \pi_r(x)) \end{array}$$
est un morphisme d'anneaux de noyau $\mathrm{Ker}(\varphi) = (a_1 \dots a_r)$.

(ii) Il existe $u_1, \dots, u_r \in A$ tels que
$$\sum_{i=1}^{r} u_i b_i = 1$$
où $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $b_i = \frac{a}{a_i}$

(iii) φ est surjectif et induit un isomorphisme $\overline{\varphi} : A/(a_1 \dots a_r) \to A/(a_1) \times \cdots \times A/(a_r)$. On a,
$$\overline{\varphi}^{-1} : \begin{array}{ccc} A/(a_1) \times \cdots \times A/(a_r) & \to & A/(a_1 \dots a_r) \\ (\pi_1(x_1), \dots, \pi_r(x_r)) & \mapsto & \pi\left(\sum_{i=1}^{r} x_i u_i b_i\right) \end{array}$$
où π est la surjection canonique de A sur le quotient $A/(a_1 \dots a_r)$.

Démonstration. (i) On vérifie sans difficulté que φ est un morphisme d'anneaux (du fait que les projections canoniques sur les quotients en sont). De là,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(\varphi) &= \{x \in A \mid \forall i \in [\![1, r]\!],\ x \equiv 0 \mod a_i\} \\ &= \{x \in A \mid \forall i \in [\![1, r]\!],\ a_i \mid x\} \\ &= \{x \in A \mid \mathrm{ppcm}(a_1, \dots, a_r) \mid x\} \end{aligned}$$

Mais, $a_1, \dots, a_r$ sont premiers entre eux deux à deux. Donc,

$$\mathrm{ppcm}(a_1, \dots, a_r) = a_1 \dots a_r$$

et on conclut que $\mathrm{Ker}(\varphi) = (a_1 \dots a_r)$.

(ii) Supposons par l'absurde que $b_1, \dots, b_r$ ne sont pas premiers entre eux dans leur ensemble.

Comme A est principal, donc factoriel, il existe un premier $p \in A$ tel que

$$\forall i \in [\![1, r]\!],\ p \mid b_i$$

Comme p divise $b_1 = a_2 \dots a_r$, il existe $i \in [\![2, r]\!]$ tel que $p \mid a_i$. Mais, divisant b_i, il divise a_j où $j \in [\![1, r]\!] \setminus \{i\}$. Contradiction car a_1 et a_j sont premiers entre eux. La fin du raisonnement est une conséquence directe du théorème de Bézout valable dans les anneaux principaux.

(iii) Pour $i, j \in [\![1, r]\!]$ tels que $i \neq j$, on a

$$\pi_j(b_i) = \pi_j(0)$$

puisque b_i est multiple de a_j. Ceci permet d'écrire

$$\pi_j(1) = \pi_j\left(\sum_{i=1}^{r} u_i b_i\right) = \pi_j(u_j)\pi_j(b_j)$$

Donc, $\pi_j(b_j)$ est inversible dans $A/(a_j)$, d'inverse $\pi_j(u_j)$. Ainsi, soient $\pi_1(x_1), \dots, \pi_r(x_r) \in A/(a_1) \times \cdots \times A/(a_r)$. En posant

$$x = \sum_{i=1}^{r} x_i u_i b_i$$

on a

$$\pi_j(x) = \pi_j(x_j) + \pi_j(u_j) + \pi_j(b_j) = \pi_j(x_j)$$

donc $\varphi(\pi(x)) = (\pi_1(x_1), \dots, \pi_r(x_r))$. Le morphisme φ est surjectif. Par le théorème de factorisation des morphismes, il induit un isomorphisme

$$\overline{\varphi} : \begin{array}{ccc} A/(a_1 \dots a_r) & \to & A/(a_1) \times \cdots \times A/(a_r) \\ \pi(x) & \mapsto & (\pi_1(x), \dots, \pi_r(x)) \end{array}$$

et on a même prouvé que l'inverse $\overline{\varphi}^{-1}$ est défini par

$$\overline{\varphi}^{-1} : \begin{array}{ccc} A/(a_1) \times \cdots \times A/(a_r) & \to & A/(a_1 \dots a_r) \\ (\pi_1(x_1), \dots, \pi_r(x_r)) & \mapsto & \pi\left(\sum_{i=1}^{r} x_i u_i b_i\right) \end{array}$$

□

Exemple 3. Le système

$$\begin{cases} u \equiv 1 \mod 3 \\ u \equiv 3 \mod 5 \\ u \equiv 0 \mod 7 \end{cases}$$

admet une unique solution dans $\mathbb{Z}/105\mathbb{Z} : \overline{28}$. Les solutions dans $\mathbb{Z}$ sont donc de la forme $28 + 105k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

[ULM18] p. 58

Démonstration. On se place dans l'anneau principal $A = \mathbb{Z}$. Les entiers 3, 5 et 7 sont premiers entre eux : le triplet $(1 + (3), 3 + (5), 0 + (7)) = (x_1 + (3), x_2 + (5), x_3 + (3))$ admet un unique antécédent

par $\overline{\varphi}^{-1}$ du Théorème 2. On a ainsi existence et unicité d'une solution modulo $3 \times 5 \times 7 = 105$. On explicite une relation de Bézout pour $15, 21, 35$:

$$\underbrace{-1}_{=u_1} \times \underbrace{35}_{=b_1} + \underbrace{6}_{=u_2} \times \underbrace{21}_{=b_2} + \underbrace{(-6)}_{=u_3} \times \underbrace{15}_{=b_3} = 1$$

Reste à calculer

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}^{-1}(1+(3), 3+(5), 0+(7)) &= \sum_{i=1}^{3} x_i u_i b_i + (105) \\ &= 1 \times (-1) \times 35 + 3 \times 6 \times 21 + 0 \times (-6) \times 15 + (105) \\ &= 343 + (105) \\ &= 28 + (105)\end{aligned}$$

Les solutions sont bien de la forme escomptée. □

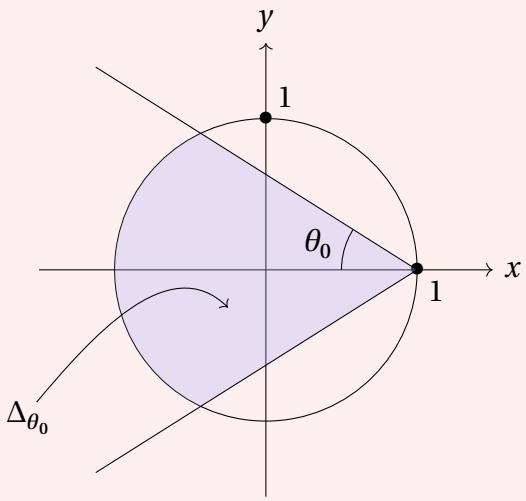
Remarque 4. **[ULM18]** utilise un autre algorithme pour trouver la solution. Le fait de chercher un antécédent permet de faire un lien "direct" avec le Théorème 2. Attention, il faut réussir à trouver les coefficients de Bézout…

28 Théorème d'Abel angulaire

On montre le théorème d'Abel "angulaire", qui permet d'intervertir certaines sommes et limites, et on l'applique justement au calcul de deux sommes.

[GOU20] p. 263

Théorème 1 (Abel angulaire)**.** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 tel que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série sur le disque unité D de $\mathbb{C}$. On fixe $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et on pose $\Delta_{\theta_0} = \{z \in D \mid \exists \rho > 0 \text{ et } \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0] \text{ tels que } z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$.



Alors $\lim\limits_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Démonstration. On note $\forall n \in \mathbb{N}$, $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $R_n = S - S_n$. On chercher à majorer $|f(z) - S|$; on va effectuer une transformation d'Abel en écrivant $\forall n \geq 1$, $a_n = R_{n-1} - R_n$. Soit $z \in D \setminus \{0\}$. $\forall N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} a_n z^n &= \sum_{n=1}^{N} (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - 1) - \sum_{n=1}^{N} R_n (z^n - 1) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - z^n) - R_N (z^N - 1) \\
&= (z-1) \sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n - R_N (z^N - 1)
\end{aligned}$$

Donc en faisant $N \to +\infty$:

$$f(z) - S = (z-1) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n \qquad (*)$$

Soit $\epsilon > 0$. $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|R_n| < \epsilon$. D'après $(*)$, $\forall z \in D$,

$$\begin{aligned} |f(z) - S| &\leq |z-1| \left| \sum_{n=0}^{N} R_n z^n \right| + \epsilon |z-1| \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} |z|^n \right) \\ &\leq |z-1| \left(\sum_{n=0}^{N} |R_n| \right) + \epsilon \frac{|z-1|}{1-|z|} \end{aligned} \tag{$**$}$$

Soit $z \in \Delta_{\theta_0}$ de sorte que $z = 1 - \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $|\theta| \leq \theta_0$. Notons avant toute chose que $|z-1| = \rho$. Cherchons maintenant des conditions sur z pour majorer les deux termes :

— On a :

$$\begin{aligned} |z|^2 &= (1 - \rho\cos(\theta))^2 + (\rho\sin(\theta))^2 \\ &= 1 - 2\rho\cos(\theta) + \rho^2(\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2) \\ &= 1 - 2\rho\cos(\theta) + \rho^2 \end{aligned}$$

En supposant $\rho \leq \cos(\theta_0)$, cela permet de majorer le deuxième terme de $(**)$:

$$\begin{aligned} \frac{|z-1|}{1-|z|} &= \frac{|z-1|}{1-|z|^2}(1+|z|) \\ &= \frac{\rho}{2\rho\cos(\theta) - \rho^2}(1+|z|) \\ &\leq \frac{2}{2\cos(\theta) - \rho} \\ &\leq \frac{2}{2\cos(\theta_0) - \cos(\theta_0)} \\ &= \frac{2}{\cos(\theta_0)} \end{aligned}$$

— Soit $\alpha > 0$ suffisamment petit pour que $\alpha \sum_{n=0}^{N} |R_n| < \epsilon$. Si $z \in \Delta_{\theta_0}$ tel que $|z-1| \leq \alpha$, alors on peut majorer le premier terme de $(**)$:

$$|z-1| \left(\sum_{n=0}^{N} |R_n| \right) \leq \alpha \left(\sum_{n=0}^{N} |R_n| \right) < \epsilon$$

Donc, en faisant $z \longrightarrow 1$ tel que $z \in \Delta_{\theta_0}$ (on aura bien $\rho = |z-1| \leq \inf\{\alpha, \cos(\theta_0)\}$), et en injectant les deux majorations trouvées dans $(**)$:

$$|f(z) - S| \leq \epsilon + \epsilon \frac{2}{\cos(\theta_0)} = \epsilon \left(1 + \frac{2}{\cos(\theta_0)} \right)$$

d'où le résultat. □

Application 2.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} = \frac{\pi}{4}$$

Démonstration. En appliquant le Théorème 1 :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)} &= \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}x^n\\ &= \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\arctan(x)\\ &= \arctan(1)\\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

□

Application 3.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$$

Démonstration. Toujours en appliquant le Théorème 1 :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} &= \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\\ &= \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\ln(1+x)\\ &= \ln(2)\end{aligned}$$

□

29 Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

En construisant un raisonnement autour du théorème du point fixe de Banach, on montre le théorème de Cauchy-Lipschitz, qui garantit l'existence d'une solution répondant à une condition initiale et l'unicité d'une solution maximale.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Lemme 1. Soit I un intervalle compact. L'espace $(\mathscr{C}(I, \mathbb{K}^d), \|.\|_\infty)$ est complet.

Démonstration. Soit (f_n) une suite de Cauchy de $(\mathscr{C}(I, \mathbb{K}^d), \|.\|_\infty)$. Soit $x \in I$, on a

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, |f_p(x) - f_q(x)| \leq \|f_p - f_q\|_\infty$$

donc $(f_n(x))$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$. Comme $\mathbb{K}$ est complet, la suite $(f_n(x))$ converge vers une limite notée $f(x)$. Ainsi, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction $f : I \to \mathbb{K}$ nouvellement définie. Il reste à montrer que la fonction f est continue.

Notons déjà que (f_n) est de Cauchy, et est en particulier bornée :

$$\exists M \geq 0 \text{ tel que } \|f_n\|_\infty \leq M$$

donc en particulier, si $x \in I$, $|f_n(x)| \leq M$. Par passage à la limite, on obtient $|f(x)| \leq M$. Donc f est bornée et écrire $\|f\|_\infty$ a bien du sens.

Soit $\epsilon > 0$. Par définition,

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p, q \geq N, \|f_p - f_q\|_\infty < \epsilon$$

Donc,

$$\forall x \in I, \forall p, q \geq N, |f_p(x) - f_q(x)| \leq \|f_p - f_q\|_\infty < \epsilon$$

En faisant tendre p vers l'infini, on obtient :

$$\forall x \in I, \forall q \geq N, |f(x) - f_q(x)| < \epsilon$$

Nous venons d'écrire exactement la définition de la convergence uniforme ! Ainsi, (f_n) est une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers f, donc f est continue. □

Théorème 2 (Cauchy-Lipschitz linéaire)**.** Soient $A : I \to \mathscr{M}_d(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathbb{K}^d$ deux fonctions continues. Alors $\forall t_0 \in I$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y' = A(t)Y + B(t) \\ Y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{C}$$

admet une unique solution définie sur I tout entier.

[DAN] p. 520

Démonstration. Commençons par supposer l'intervalle I compact. On va montrer l'existence d'une solution globale. On écrit l'équation sous forme intégrale :

$$Y \in \mathscr{C}^1 \text{ vérifie } (C) \iff Y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} A(u)Y(u) + B(u)\,\mathrm{d}u \qquad (*)$$

et on introduit la suite de fonctions (Y_n) définie par récurrence sur I par $Y_0 = y_0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} A(x)Y_n(u) + B(u)\,\mathrm{d}u \qquad (**)$$

Notons $\alpha = \sup_{t\in I} \|A(t)\|$ et $\beta = \sup_{t\in I} \|B(t)\|$. Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 1$ et tout $t \in I$:

$$\|Y_n(t) - Y_{n-1}(t)\| \leq (\alpha\|y_0\| + \beta)\frac{\alpha^{n-1}|t-t_0|^n}{n!}$$

Le résultat est clairement vrai pour $n = 1$, supposons donc le vrai à rang $n \geq 1$. Pour $t \geq t_0$:

$$\begin{aligned}
\|Y_{n+1}(t) - Y_n(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} A(u) \times (Y_n(u) - Y_{n-1}(u))\,\mathrm{d}u \right\| \\
&\leq \alpha \int_{t_0}^{t} (\alpha\|y_0\| + \beta)\frac{\alpha^{n-1}|u-t_0|^n}{n!}\mathrm{d}u \\
&\leq (\alpha\|y_0\| + \beta)\frac{\alpha^n|t-t_0|^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

et on procède de même pour $t \leq t_0$, ce qui achève la récurrence.

Soit L la longueur de I. On obtient donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|Y_n - Y_{n-1}\|_\infty \leq (\alpha\|y_0\| + \beta)\frac{\alpha^{n-1}}{n!}L^n$$

Il en résulte que la série de fonction $\sum(Y_n - Y_{n-1})$ est normalement convergente. Comme $(\mathscr{C}(I,\mathbb{K}^d), \|.\|_\infty)$ est complet, la série est uniformément convergente. On a donc l'existence d'une fonction $Y \in \mathscr{C}(I,\mathbb{K}^d)$ telle que

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} (Y_n - Y_{n-1}) - Y \right\|_\infty = \|Y_n - (Y + Y_0)\|_\infty \longrightarrow 0$$

ie. (Y_n) converge vers $Y + Y_0 = Y + y_0 = Z$. Par convergence uniforme sur un intervalle compact, il est possible de passer à la limite dans $(**)$. D'où :

$$\forall t \in I,\ Z(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} A(u)Z(u) + B(u)\,\mathrm{d}u$$

et comme Z est continue, elle est $\mathscr{C}^1$ et vérifie donc bien $(*)$.

On peut maintenant montrer l'unicité. Soient Y et Z deux solutions de (C) sur I. Par récurrence sur l'entier n, on montre comme ci-dessus que pour tout $t \in I$:

$$\|Y(t) - Z(t)\| \leq \frac{\alpha^n|t-t_0|^n}{n!}\|Y - Z\|_\infty \longrightarrow 0$$

donc Y et Z coïncident bien sur I.

Supposons maintenant I quelconque. Il existe donc (K_n) une suite croissante d'intervalles compacts telle que $I = \bigcup_{n=0}^{+\infty} K_n$. En particulier, on définit bien l'application

$$\theta : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K}^d \\ t & \mapsto & Y_n(t) \end{array}$$

(où Y_n est la solution de (C) sur $K_n \ni t$). En particulier, θ est dérivable sur I tout entier, vérifie (C), et prolonge toute solution. □

Selon la leçon, on pourra préférer le théorème suivant (dont la démonstration utilise des arguments semblables).

[GOU20] p. 374

Théorème 3 (Cauchy-Lipschitz local)**.** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de E. Soit $F : I \times \Omega \to E$ une fonction continue et localement lipschitzienne en la seconde variable. Alors, pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = F(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad (C)$$

admet une unique solution maximale.

Démonstration. Nous commençons par montrer l'existence en 4 étapes.

— Localisation : Fixons un réel $r > 0$ tel que le produit $P = [t_0 - r, t_0 + r] \times \overline{B}(y_0, r)$ soit contenu dans $I \times \Omega$. F est continue sur P qui est compact, donc est bornée par M sur P.

— Mise sous forme intégrale : Comme une solution de $y' = F(t,y)$ est de ce fait $\mathscr{C}^1$, on a

$$y \in \mathscr{C}^1 \text{ vérifie } (C) \iff y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F(u, y(u))\,\mathrm{d}u \qquad (*)$$

— Choix d'un domaine stable : Soit $\alpha \in]0, r[$. Introduisons l'intervalle $I_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, l'espace $A_\alpha = \mathscr{C}(I_\alpha, \overline{B}(y_0, r))$, puis l'application

$$\Psi : \begin{array}{ccc} A_\alpha & \to & \mathscr{C}(I_\alpha, E) \\ \varphi & \mapsto & \left(t \mapsto y_0 + \int_{t_0}^{t} F(u, \varphi(u))\,\mathrm{d}u\right) \end{array}$$

Le problème est ici de rendre A_α stable par Ψ. Pour tout $t \in I_\alpha$,

$$\begin{aligned} &\|F(t, \varphi(t))\| \leq M \\ \implies &\|\Psi(\varphi)(t) - y_0\| \leq M|t - t_0| \leq \alpha M \end{aligned}$$

Par suite, en choisissant $\alpha M < r$, le domaine A_α est stable par Ψ.

— Détermination d'un domaine de contraction : Ici, A_α est normé par la norme $\|.\|_\infty$, et on

veut faire de Ψ une contraction stricte. Soient $\varphi, \phi \in A_\alpha$, par définition, pour tout $t \in I_\alpha$,

$$\begin{aligned}\|(\Psi(\varphi)-\Psi(\phi))(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} (F(u,\varphi(u)) - F(u,\phi(u)))\,\mathrm{d}u \right\| \\ &\leq k|t-t_0|\,\|\varphi-\phi\|_\infty \\ &\leq k\alpha\,\|\varphi-\phi\|_\infty\end{aligned}$$

où k désigne le rapport de lipschitziannité de F. On choisit désormais α tel que $k\alpha < 1$ et $\alpha M < r$.

— Conclusion : L'application Ψ est, par choix de α, une contraction stricte de $(A_\alpha, \|.\|_\infty)$ dans lui-même. Le fermé $\overline{B}(y_0, r)$ de l'espace de Banach de E est complet, par suite $(A_\alpha, \|.\|_\infty)$ l'est aussi.

Par le théorème du point fixe de Banach, Ψ possède donc un point fixe φ dans A_α. φ est alors de classe $\mathscr{C}^1$ et vérifie (C) par $(*)$.

Il reste maintenant à montrer l'unicité. On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (C). $\mathscr{S} \neq \emptyset$, donc peut définir J comme la réunion des intervalles de définition des solutions de (C).

Soient $\varphi, \phi \in \mathscr{S}$ (on note K et L leur intervalle de définition). Une récurrence sur n donne

$$\begin{aligned}\forall t \in K \cap L,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \|\varphi(t)-\phi(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|F(u,\varphi(u)) - F(u,\phi(u))\|\,\mathrm{d}u \right| \\ &\leq \frac{|t-t_0|^n}{n!} k^n \sup_{t\in K\cap L} |\varphi(t)-\phi(t)| \\ &\longrightarrow 0\end{aligned}$$

Donc φ et ϕ coïncident sur $K \cap L$.

Ainsi, on définit correctement l'application

$$\theta : \begin{array}{ccc} J & \to & E \\ t & \mapsto & \phi(t) \end{array}$$

(où $\phi \in S$ tel que t est dans son intervalle de définition). Si $t \in J$, il existe $\phi \in \mathscr{S}$ tel que t soit dans son intervalle de définition K. Comme ϕ et θ coïncident sur K, θ est dérivable sur K et

$$\forall t \in K,\ \theta'(t) = \phi'(t) = F(t,\phi(t)) = F(t,\theta(t))$$

Et comme $\theta(t_0) = y_0$, $\theta \in \mathscr{S}$ et prolonge toute solution. Donc θ est maximale et est bien unique. □

30 Théorème de Dirichlet faible

En raisonnant par l'absurde et en utilisant certaines propriétés des polynômes cyclotomiques, on démontre que l'ensemble des premiers congrus à 1 modulo un certain entier n est infini.

Lemme 1. Soient $a \in \mathbb{N}$ et p premier tels que $p \mid \Phi_n(a)$ mais $p \nmid \Phi_d(a)$ pour tout diviseur strict d de n. Alors $p \equiv 1 \mod n$.

[GOU21] p. 99

Démonstration. On a,

$$X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d = \Phi_n \underbrace{\prod_{d||n} \Phi_d}_{=F}$$

Comme $F \in \mathbb{Z}[X]$, en évaluant en a :

$$a^n - 1 = \Phi_n(a)F(a) \implies p \mid a^n - 1 \text{ car } F(a) \in \mathbb{Z}$$

Autrement dit, $a^n \equiv 1 \mod p$. En notant m l'ordre de $\overline{a}$ dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, on a $a^m \equiv 1 \mod p$. D'où $m \mid n$. Ainsi :

— Si $m = n$, alors $\overline{a}$ est d'ordre n. Donc par le théorème de Lagrange, $n \mid |(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*| = p - 1$ ie. $p \equiv 1 \mod n$.

— Sinon, $m < n$. Comme $m \mid n$,

$$X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d = \Phi_n \left(\prod_{d|m} \Phi_d \right) \left(\prod_{\substack{d||n \\ d \nmid m}} \Phi_d \right) = \Phi_n (X^m - 1) \left(\prod_{\substack{d||n \\ d \nmid m}} \Phi_d \right)$$

Mais, $\overline{a}$ est racine de $\overline{\Phi_n}$ et $X^m - \overline{1} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$. En particulier, $\overline{a}$ est (au moins) racine double de $X^n - \overline{a}$. On peut donc écrire,

$$X^n - 1 \equiv (X - a)^2 G(X) \mod p$$

Avec $X = Y + a$, cela donne :

$$(Y + a)^n - 1 \equiv Y^2 G(Y + a) \mod p$$

Le polynôme de droite est de degré ≥ 2, donc p divise les coefficients des termes de degré 0 et 1 de $(Y + a)^n - 1$, ie.

$$p \mid a^n - 1 \text{ et } p \mid \binom{n}{1} a^{n-1} = n a^{n-1}$$

De la première égalité, on en tire $p \nmid a$. Ainsi, a est premier avec p (c'est donc également vrai pour a^{n-1}). Finalement, on tire de la deuxième égalité que $p \mid n$.

□

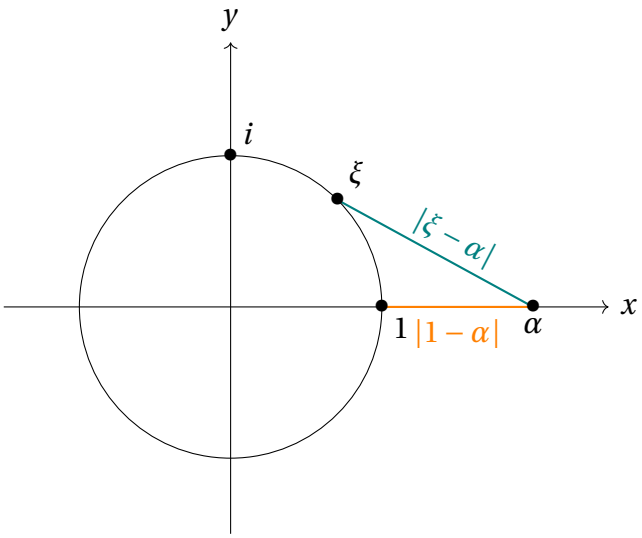
Théorème 2 (Dirichlet faible)**.** Pour tout entier n, il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo n.

Démonstration. On suppose par l'absurde qu'il n'existe qu'un nombre fini de premiers de la forme $1+kn$, que l'on note $p_1, \dots, p_m$. On considère $N = \Phi_n(\alpha)$ où $\alpha = np_1 \dots p_m$. On remarque en particulier que $N \equiv a_0 \mod \alpha$, où a_0 est le coefficient constant de Φ_n (cela se voit en écrivant $\Phi_n = \sum_{k=0}^{\varphi(n)} a_k X^k$, ce qui donne $N = a_0 + \alpha \sum_{k=1}^{\varphi(n)} a_k \alpha^{k-1}$ une fois évalué en α).

Or, $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d$. En évaluant en 0, on en tire :

$$-1 = \prod_{d|n} \Phi_d(0) \implies \pm 1 = a_0, \text{ car } \forall d \mid n, \Phi_d \in \mathbb{Z}[X]$$

Ainsi, $N \equiv \pm 1 \mod \alpha$. Or $|N| = |\Phi_n(\alpha)| = \prod_{\xi \in \pi_n^*} |\alpha - \xi| \geq 2$. On peut en effet interpréter $|\alpha - \xi|$ comme la distance du complexe α au complexe ξ ; le premier est sur l'axe réel et est ≥ 2, le second est sur le cercle unité :



En particulier, $\exists p$ premier tel que $p \mid N$. Par le Lemme 1 :

— Ou bien $p \mid n$, dans ce cas $p \mid \alpha = np_1 \dots p_m$.

— Ou bien $p \equiv 1 \mod n$, dans ce cas $p = p_k$ pour un certain $k \in [\![1, m]\!]$. Et on a encore $p \mid \alpha$.

Pour conclure, on écrit $N = \alpha q \pm 1$ (par division euclidienne), et on a $p \mid N - \alpha q = \pm 1$: absurde. □

Remarque 3. Si vous choisissez de présenter ce développement, il faut au moins connaître l'énoncé de la version forte du théorème.

Théorème 4 (Progression arithmétique de Dirichlet)**.** Pour tout entier n et pour tout m premier avec n, il existe une infinité de nombres premiers congrus à m modulo n.

31 Théorème de Fejér

Dans ce développement, on montre le théorème de Fejér, qui assure la convergence de la série de Fourier d'une fonction vers sa série de Fourier au sens de Cesàro.

Notation 1. Pour tout $p \in [1, +\infty]$, on note $L_p^{2\pi}$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodiques et mesurables, telles que $\|f\|_p < +\infty$.

Notation 2. On note $\forall N \in \mathbb{N}^*$:

— $e_n : x \mapsto e^{inx}$.

— $D_N : x \mapsto \sum_{n=-N}^{N} e_n$, le noyau de Dirichlet.

— $K_N = \frac{D_0 + \cdots + D_{N-1}}{N}$, le noyau de Fejér.

Notation 3. On note également, pour toute fonction $f \in L_1^{2\pi}$.

— $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \, \mathrm{d}t$, le n-ième coefficient de Fourier de f.

— $S_N(f) : x \mapsto \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n$, la somme partielle d'ordre N de la série de Fourier de f.

— $\sigma_N(f) : x \mapsto \frac{1}{N-1} \sum_{n=0}^{N} S_n(f)(x)$, la moyenne de Cesàro des sommes partielles de la série de Fourier de f.

Lemme 4. Soit $N \in \mathbb{N}$. **[AMR08]** p. 184

(i) D_N est une fonction paire, 2π-périodique, et de norme 1.

(ii)
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, D_N(x) = \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

(iii) Pour tout $f \in L_1^{2\pi}$, $S_N(f) = f * D_N$.

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}$.

(i) Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$D_N(-x) = \sum_{n=-N}^{N} e_n(-x) = \sum_{n=-N}^{N} e_{-n}(x) = \sum_{n=-N}^{N} e_n(x) = D_N(x)$$
Donc D_N est bien paire. Elle est 2π-périodique car e_n l'est pour tout $n \in \mathbb{Z}$. De plus,
$$1 = c_0(D_N) = \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) \, \mathrm{d}x = \|D_N\|_1$$

(ii) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. On a :

$$\begin{aligned} D_n(x) &= e^{-iNx} \sum_{n=0}^{2N} e^{inx} \\ &= e^{-iNx} \frac{e^{(2N+1)ix} - 1}{e^{ix} - 1} \\ &= e^{-iNx} \frac{e^{(2N+1)i\frac{x}{2}} \left(e^{(2N+1)i\frac{x}{2}} - e^{-(2N+1)i\frac{x}{2}} \right)}{e^{i\frac{x}{2}} \left(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}} \right)} \\ &= \frac{2i \sin\left(\left(N + \frac{1}{2} \right) x \right)}{2i \sin\left(\frac{x}{2} \right)} \\ &= \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2} \right) x \right)}{\sin\left(\frac{x}{2} \right)} \end{aligned}$$

(iii) Soit $f \in L_1^{2\pi}$.

$$f * D_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} f * e_n = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n = S_N(f)$$

□

Lemme 5. Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $f \in L_1^{2\pi}$.

(i) K_N est une fonction positive et de norme 1.

(ii)

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z},\ K_N(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin\left(\frac{Nx}{2} \right)}{\sin\left(\frac{x}{2} \right)} \right)^2$$

(iii) $K_N = \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N} \right) e_n$.

(iv) $\sigma_N(f) = f * K_N$.

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Nous allons user et abuser du Lemme 4.

(i) La positivité résulte directement du point suivant. De plus,

$$\|K_N\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_N(x)\, \mathrm{d}x = 1$$

(ii) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} NK_N(x) &= \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{|n|\leq j} e_j \right) \\ &= \sum_{|n|\leq N-1} e_n \left(\sum_{|n|\leq j\leq N-1} 1 \right) \\ &= \sum_{|n|\leq N-1} (N-|n|)e_n \\ &= \sum_{n=-N}^{N} (N-|n|)e_n \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} NK_N &= \sum_{n=0}^{N-1} D_n \\ &= \sum_{n=0}^{N} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{i(n+\frac{1}{2})x} \right) \\ &= \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \operatorname{Im}\left(e^{\frac{ix}{2}} \frac{e^{iNx}-1}{e^{ix}-1} \right) \\ &= \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \operatorname{Im}\left(e^{\frac{ix}{2}} \frac{e^{\frac{iNx}{2}} 2i\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{e^{\frac{ix}{2}} 2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right) \\ &= \frac{\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2} \operatorname{Im}\left(e^{\frac{iNx}{2}} \right) \\ &= \frac{\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)^2}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

(iv)

$$N\sigma_N(f) = \sum_{n=0}^{N-1} S_n(f) = \sum_{n=0}^{N-1} f * D_n = f * \left(\sum_{n=0}^{N-1} D_n \right)$$

Donc on a bien $\sigma_N(f) = f * K_N$.

□

Théorème 6 (Fejér)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique.

(i) Si f est continue, alors $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et $(\sigma_N(f))$ converge uniformément vers f.

(ii) Si $f \in L^{2\pi}_p$ pour $p \in [1, +\infty[$, alors $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$ et $(\sigma_N(f))$ converge vers f pour $\|.\|_p$.

[AMR08] p. 190

Démonstration. (i) On suppose f continue.

— Sur l'intervalle compact $[0,2\pi]$, f est bornée et atteint ses bornes. En particulier, $\|f\|_\infty$ est bien définie. De plus, si $x \in \mathbb{R}$, par le Lemme 5 on a :

$$\sigma_N(f)(x) = (f * K_N)(x)$$

Donc,

$$|\sigma_N(f)(x)| \leq \|f\|_\infty \underbrace{\|K_N\|_1}_{=1} = \|f\|_\infty$$

d'où $\sigma_N(f)$ est bornée avec

$$\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

— Soit $\delta \in]0,\pi]$. Posons

$$\omega(\delta) = \sup_{|u-v|\leq\delta} \{|f(u)-f(v)|\}$$

le module de continuité de f. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) - \sigma_N(f)(x) &= f(x) - (f * K_N)(x) \\ &= f(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_N(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x)-f(x-t))K_N(t)\,\mathrm{d}t \qquad (*) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} |f(x)-\sigma_N(f)(x)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leq\delta} (f(x)-f(x-t))K_N(t)\,\mathrm{d}t \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi} (f(x)-f(x-t))K_N(t)\,\mathrm{d}t \\ &\leq \frac{\omega(\delta)}{2\pi}\int_{|t|\leq\delta} K_N(t)\,\mathrm{d}t + 2\|f\|_\infty \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi} K_N(t)\,\mathrm{d}t \\ &\leq \frac{\omega(\delta)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\,\mathrm{d}t + \frac{2\|f\|_\infty}{N\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)^2} \\ &= \omega(\delta) + \frac{2\|f\|_\infty}{N\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

Donc, on a :

$$\|f(x)-\sigma_N(f)(x)\|_\infty \leq \omega(\delta) + \frac{2\|f\|_\infty}{N\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)^2} \qquad (**)$$

On peut passer à la limite supérieure dans $(**)$ pour obtenir :

$$\limsup_{N\to+\infty} \|f(x)-\sigma_N(f)(x)\|_\infty \leq \omega(\delta)$$

Comme f est continue sur le compact $[0,2\pi]$, elle y est uniformément continue par le

théorème de Heine :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x,y) \in [0,2\pi]^2, |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

On peut donc faire tendre δ vers 0 pour obtenir $\limsup_{N\to+\infty} \|f(x) - \sigma_N(f)(x)\|_\infty \leq 0$ie.

$$\limsup_{N\to+\infty} \|f(x) - \sigma_N(f)(x)\|_\infty = 0$$

Comme,

$$0 \leq \liminf_{N\to+\infty} \|f(x) - \sigma_N(f)(x)\|_\infty \leq \limsup_{N\to+\infty} \|f(x) - \sigma_N(f)(x)\|_\infty = 0$$

On a bien,

$$\lim_{N\to+\infty} \|f(x) - \sigma_N(f)(x)\|_\infty = 0$$

(ii) — Par le Lemme 5, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\sigma_N(f)(x)|^p = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_N(t) \, \mathrm{d}t \right|^p$$

On applique l'inégalité de Hölder à $\frac{K_N}{2\pi}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\sigma_N(f)(x)|^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|^p K_N(t) \, \mathrm{d}t$$

Enfin, en intégrant par parties et en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned} \|\sigma_N(f)\|_p^p &\leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) \left(|f(x-t)|^p \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) \left(|f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t \\ &= \|K_N\|_1 \|f\|_p^p \\ &= \|f\|_p^p \end{aligned}$$

— Par $(*)$:

$$\|\sigma_N(f) - f\|_p^p \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) \left(|f(x-t)|^p \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t$$

En posant $g : t \mapsto \|f - \tau_t f\|_p^p$ (où τ est l'opérateur de translation) :

$$\begin{aligned} \|\sigma_N(f) - f\|_p^p &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) g(-t) \, \mathrm{d}t \\ &= (g * K_N)(0) \\ &= \sigma_N(g)(0) \end{aligned}$$

Comme g est continue et 2π-périodique, on a par le point précédent

$$\sigma_N(g)(0) \longrightarrow_{+\infty} g(0) = 0$$

Donc, on a bien,

$$\lim_{N\to+\infty} \|\sigma_N(f) - f\|_p = 0$$

□

Remarque 7. Dans ce développement, il est courant de ne prouver que le premier point.

32 Théorème de Frobenius-Zolotarev

Nous démontrons le théorème de Frobenius-Zolotarev qui permet de calculer la signature d'un endomorphisme d'un espace vectoriel sur un corps fini possédant au moins 3 *éléments.*

Soient $p \geq 3$ un nombre premier et V un espace vectoriel sur $\mathbb{F}_p$ de dimension finie.

Définition 1. Soit H un hyperplan de V et soit G une droite supplémentaire de H dans V.La dilatation u de base H, de direction G, et de rapport $\lambda \in \mathbb{K}^*$ est l'unique endomorphisme de V défini par

$$\forall g \in G,\ \forall h \in H,\ u(g+h) = h + \lambda g$$

[I-P] p. 203

Remarque 2. On suppose connu le fait que les transvections et les dilatations engendrent $\mathrm{GL}(V)$.

[PER] p. 99

Lemme 3. Soient $u \in \mathrm{GL}(V)$ et H un hyperplan de V tel que $u_{|H} = \mathrm{id}_H$. Si $\det(u) \neq 1$, alors u est une dilatation.

p. 96

Démonstration. On note $n = \dim(V)$. Comme $u_{|H} = \mathrm{id}_H$ et $\dim(H) = n-1$, on en déduit que 1 est valeur propre de multiplicité $n-1$ de u et que H est le sous-espace propre associé :

$$H = E_1(u) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_V)$$

On pose $\lambda = \det(u) \notin \{0,1\}$. λ est valeur propre de u (on peut le voir par exemple en calculant le polynôme caractéristique de u) de multiplicité 1. Donc u est diagonalisable, et dans une base $\mathscr{B}$ adaptée à la diagonalisation, on a :

$$\mathrm{Mat}(u,\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

d'où le résultat. □

Lemme 4. Les dilatations engendrent $\mathrm{GL}(V)$.

[I-P] p. 203

Démonstration. Pour obtenir le résultat, il suffit de montrer que toute transvection est la composée de deux dilatations (cf. Remarque 2). Soit u une transvection d'hyperplan H. Comme $\mathbb{F}_p$ contient au moins 3 éléments, il existe alors v une dilatation d'hyperplan H et de rapport $\lambda \neq 1$.

Ainsi, l'application $w = u \circ v$ est dans $\mathrm{GL}(V)$ et fixe H. Comme $\det(w) = \det(v) = \lambda \neq 1$, le Lemme 3 permet de conclure que w est une dilatation. Ainsi, $u = w \circ v^{-1}$ est le produit de deux dilatations v^{-1} est une dilatation (toujours d'après le Lemme 3). □

Notation 5. Soit $a \in \mathbb{F}_p$. On note $\left(\frac{a}{p}\right)$ le symbole de Legendre de a modulo p.

Théorème 6 (Frobenius-Zolotarev)**.**

$$\forall u \in \mathrm{GL}(V), \epsilon(u) = \left(\frac{\det(u)}{p}\right)$$

où u est vu comme une permutation des éléments de V.

Démonstration. Le groupe multiplicatif d'un corps fini est cyclique, donc il existe $a \in \mathbb{F}_p^*$ tel que

$$\mathbb{F}_p^* = \langle a \rangle$$

En conséquence, si u est la dilatation de V de base H, de direction G, et de rapport $\lambda \in \mathbb{F}_p^*$, alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda = a^k$. On en déduit que si v est la dilatation de V de base H, de direction G, et de rapport a, alors $\forall x \in V$ écrit $x = g + h$ avec $g \in G$ et $h \in H$:

$$v^k(x) = v^k(g+h) = h + a^k g = h + \lambda g = u(g+h) = u(x)$$

d'où $v^k = u$. Ainsi, toute dilatation est une puissance d'une dilatation de rapport a.

Comme det, $\left(\frac{\cdot}{p}\right)$ et ϵ sont tous trois des morphismes de groupes, et comme les dilatations engendrent $\mathrm{GL}(V)$ (cf. Lemme 4), il suffit de montrer le résultat pour les dilatations de rapport a.

Soit u une dilatation de base H, de direction G, et de rapport a. Supposons par l'absurde que $\left(\frac{\det(u)}{p}\right) = 1$. Comme $\det(u) = a$, on a $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$. Mais, $\mathbb{F}_p^* = \langle a \rangle$, donc $\forall x \in \mathbb{F}_p^*$, $\left(\frac{x}{p}\right) = 1$ ie. tout élément de $\mathbb{F}_p^*$ est un carré. Or, il y a $\frac{p-1}{2}$ carrés dans $\mathbb{F}_p^*$ (et $|\mathbb{F}_p^*| = p-1$, bien-sûr) : contradiction.

Il ne reste qu'à montrer que $\epsilon(u) = -1$. Pour cela, on va étudier les orbites des éléments V sous l'action de u.

Soit $h \in H$. On a $u(h) = h$, donc son orbite est réduite à $\{h\}$ qui est de cardinal 1. Elle compte donc comme un + dans le signe de $\epsilon(u)$.

Soit maintenant $x \in V$ écrit $x = g + h$ avec $g \in G \setminus \{0\}$ et $h \in H$ de sorte que $u^k(x) = h + a^k g$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

— $\mathbb{F}_p^*$ est cyclique d'ordre $p-1$, donc $a^{p-1} = 1$. Ainsi, $f^{p-1}(x) = x$.

— Supposons par l'absurde que $\exists 1 \leq i < j \leq p-1$ tel que $u^i(x) = u^j(x)$. On a,

$$\begin{aligned} h + a^j g = h + a^i g &\iff a^{j-i}(a^i - 1)\underbrace{g}_{\neq 0} = 0 \\ &\implies a^{j-i} = 0 \text{ ou } a^i = 1 \end{aligned}$$

ce qui est absurde dans les deux cas.

L'orbite de x sous l'action de u est donc $\{x, \dots, u^{p-2}(x)\}$ qui est de cardinal $p-1$ (pair) et compte donc comme un − dans le signe de $\epsilon(u)$.

Il ne reste qu'à compter le nombre d'orbites de cardinal $p-1$. Les éléments contenus dans ces orbites forment exactement l'ensemble

$$\bigcup_{h\in H}\{g+h \mid g\in G, g\neq 0\}$$

et il y en a donc

$$|H|\times(|G|-1)=p^{n-1}(p-1)$$

(car H est un hyperplan et G est une droite). Comme ces orbites sont de cardinal $p-1$, il y a donc exactement p^{n-1} orbites. Or, p^{n-1} est impair, donc $\epsilon(u)$ est de signe négatif. Ainsi, $\epsilon(u)=-1$. □

33 Théorème de Kronecker

En utilisant les polynômes symétriques, nous montrons ici que toutes les racines d'un polynôme unitaire à coefficients entiers dont les racines sont dans $D(0,1) \setminus \{0\}$, sont en fait des racines de l'unité.

Lemme 1 (Relations de Viète)**.** Soient A un anneau commutatif unitaire intègre et $P = \sum_{i=1}^{n} a_i X^i \in A[X]$ que l'on suppose scindé dans $A[X]$ et tel que $a_n \in A^*$. Si on note $\Sigma_k(X_1, \dots, X_n)$ le k-ième polynôme symétrique élémentaire en n variables et α_1, ..., α_n les racines de P (comptées avec multiplicité), alors $\Sigma_k(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (-1)^k a_{n-k} a_n^{-1}$.

Démonstration. On a $P = a_n \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)$. En développant partiellement P, on a de même :

$$P = a_n X^n - a_n(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n a_n \alpha_1 \dots \alpha_n$$

Par identification avec la forme développée, les coefficients de X^{n-1} doivent être égaux. En particulier :

$$a_{n-1} = -a_n(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) \iff \underbrace{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}_{=\Sigma_1(\alpha_1, \dots \alpha_n)} = -a_{n-1} a_n^{-1}$$

Et on procède de même pour trouver les autres coefficients. Par exemple, $a_0 = (-1)^n a_n \alpha_1 \dots \alpha_n \iff \Sigma_n(\alpha_1, \dots \alpha_n) = (-1)^n a_0 a_n^{-1}$. □

Remarque 2. Tout au long de ce développement, nous utiliserons implicitement le fait que tout polynôme à coefficient dans $\mathbb{C}$ (donc à fortiori aussi dans $\mathbb{Z}$) admet n racines complexes comptées avec multiplicité. Il s'agit du théorème de d'Alembert-Gauss.

Théorème 3 (Kronecker)**.** Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire tel que toutes ses racines complexes appartiennent au disque unité épointé en l'origine (que l'on note D). Alors toutes ses racines sont des racines de l'unité.

[I-P] p. 279

Démonstration. Notons par Ω_n l'ensemble des polynômes unitaires à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tels que toutes leurs racines complexes appartiennent à D. Soit $P \in \Omega_n$ dont on note $a_0, \dots, a_n$ les coefficients et $z_1, \dots, z_n$ les racines complexes. On note $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\sigma_k = \Sigma_k(z_1, \dots, z_n)$. D'après le Lemme 1, on a :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \sigma_k = (-1)^k a_{n-k} \qquad (*)$$

D'où $\forall k \in [\![0,n]\!]$:

$$\begin{aligned}|\sigma_k| &= \left|\sum_{I\in\mathscr{P}_k([\![1,n]\!])}\prod_{i\in I} z_i\right| \\ &\leq \sum_{I\in\mathscr{P}_k([\![1,n]\!])}\prod_{i\in I}|z_i| \\ &\leq |\mathscr{P}_k([\![1,n]\!])|\times 1 \\ &= \binom{n}{k}\end{aligned}$$

Et par $(*)$,

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ |a_k| \leq \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

Ω_n est donc un ensemble fini (car on n'a qu'un nombre limité de choix possibles pour les coefficients a_k).

On pose maintenant

$$\forall k \in \mathbb{N},\ P_k = \prod_{j=0}^{n}(X - z_j^k)$$

qui sont des polynômes unitaires de degré n dont les racines $z_1^k, \dots, z_n^k$ appartiennent toutes à D. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $r \in [\![0,n]\!]$. D'après le Lemme 1, le coefficient de X^{n-r} de P_k est $(-1)^r\Sigma_r(z_1^k,\dots,z_n^k)$. Mais, $\Sigma_r(X_1^k,\dots,X_n^k) \in \mathbb{Z}[X]$, donc on peut y appliquer le théorème fondamental des polynômes symétriques :

$$\exists Q_{r,k} \in \mathbb{Z}[X] \text{ tel que } \Sigma_r(X_1^k,\dots,X_n^k) = Q_{r,k}(\Sigma_1(X_1,\dots,X_n),\dots,\Sigma_n(X_1,\dots,X_n))$$

Or, comme $P \in \mathbb{Z}[X]$, on a $\forall j \in [\![0,n]\!]$, $\Sigma_j(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{Z}$ d'après le Lemme 1. En particulier, on a $\Sigma_r(X_1^k,\dots,X_n^k) \in \mathbb{Z}[X]$ car $Q_{r,k} \in \mathbb{Z}[X]$. On en déduit que $\forall k \in \mathbb{N}$, $P_k \in \Omega_n$.

Comme Ω_n est fini, l'ensemble des racines de tous les P_k ; qui est $\{z \in \mathbb{C} \mid \exists k \in \mathbb{N}, P_k(z) = 0\}$ est fini. Soit $j \in [\![1,n]\!]$. L'ensemble $\{z_j^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ est inclus dans l'ensemble de ces racines, qui est fini ; il est donc lui-même fini :

$$\exists k \neq k' \text{ tel que } z_j^k = z_j^{k'}$$

Quitte à échanger les deux, on peut supposer $k \geq k'$. Comme $z_j \neq 0$, on a $z_j^{k-k'} = 1$. Donc z_j est une racine de l'unité ; ce que l'on voulait. □

Corollaire 4. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire et irréductible sur $\mathbb{Q}$ tel que toutes ses racines complexes soient de module inférieur ou égal à 1. Alors $P = X$ ou P est un polynôme cyclotomique.

Démonstration. Si 0 est racine de P, alors $X \mid P$, donc $P = X$ par irréductibilité et unitarité. Sinon, 0 n'est pas racine de P. On peut donc appliquer le Théorème 3 à P ; et donc les racines de P sont des racines de l'unité. Ainsi, en notant N le maximum des ordres des racines de P, on a :

$$P \mid (X^N - 1)^n \text{ où } n = \deg(P)$$

Or, la décomposition en irréductibles de $X^N - 1$ est

$$X^N - 1 = \prod_{d|N} \Phi_d$$

Puisque $\mathbb{Q}[X]$ est un anneau factoriel, P est premier. Donc d'après le lemme de Gauss, comme $P \mid X^N - 1$:

$$\exists d \mid N \text{ tel que } P = \Phi_d$$

□

34 Premier théorème de Sylow

En procédant par récurrence sur le cardinal du groupe, on montre l'existence d'un sous-groupe de Sylow.

Théorème 1 (Cauchy "faible")**.** Soit G un groupe abélien fini et soit p un diviseur premier de l'ordre de G. Alors, il existe un sous-groupe de G d'ordre p.

[GOU21] p. 44

Démonstration. G est fini, on peut donc l'écrire

$$G = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$$

où $(x_1, \dots, x_n)$ est un système de générateurs de G. On définit

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \langle x_1 \rangle \times \cdots \times \langle x_n \rangle & \to & G \\ (y_1, \dots, y_n) & \mapsto & y_1 \dots y_n \end{array}$$

Comme G est abélien, φ est clairement un morphisme de groupes. Et comme $(x_1, \dots, x_n)$ est un système de générateurs de G, φ est surjectif.On peut appliquer le premier théorème d'isomorphisme pour obtenir

$$G \cong (\langle x_1 \rangle \times \cdots \times \langle x_n \rangle)/\mathrm{Ker}(\varphi)$$

En particulier, $|G| \times |\mathrm{Ker}(\varphi)| = |\langle x_1 \rangle| \times \cdots \times |\langle x_n \rangle|$. On note, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $r_i = |\langle x_i \rangle|$. On a ainsi,

$$G \mid r_1 \dots r_n \implies p \mid r_1 \dots r_n$$

par transitivité de $|$. Par le lemme d'Euclide, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $p \mid r_i$. On écrit $r_i = pq$ avec $q \in \mathbb{N}^*$, et on pose $x = x_i^q$. Alors, x est d'ordre p et $H = \langle x \rangle$ est un sous-groupe de G d'ordre p. □

Théorème 2 (Premier théorème de Sylow)**.** Soit G un groupe fini d'ordre np^α avec $n, \alpha \in \mathbb{N}$ et p premier tel que $p \nmid n$. Alors, il existe un sous-groupe de G d'ordre p^α.

Démonstration. Posons $h = |G|$. On va procéder par récurrence forte sur h.

— Si $h = 1$: Alors, $n = 1$ et $\alpha = 0$. La propriété est donc triviale.

— On suppose la propriété vraie pour les groupes d'ordre strictement inférieur à h. Si $\alpha = 0$, c'est encore une fois trivial, pour les mêmes raisons qu'à l'initialisation de la propriété. Supposons donc $\alpha \geq 1$. On fait agir G sur lui-même par conjugaison, via l'action :

$$(g, h) \mapsto ghg^{-1}$$

Soit Ω un système de représentants associé à la relation "être dans la même orbite". La formule des classes donne

$$|G| = \sum_{\omega \in \Omega} |G \cdot \omega| = \sum_{\omega \in \Omega} (G : \mathrm{Stab}_G(\omega)) = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{|G|}{|\mathrm{Stab}_G(\omega)|} \qquad (*)$$

Mais,

$$\mathrm{Stab}_G(\omega) = G \iff \forall g \in G,\ g\omega g^{-1} = \omega \iff \omega \in Z(G)$$

donc, en regroupant, on peut réécrire $(*)$:

$$\begin{aligned} |G| &= \sum_{\omega\in\Omega} \frac{|G|}{|\mathrm{Stab}_G(\omega)|} \\ &= \sum_{\omega\in Z(G)} \frac{|G|}{|\mathrm{Stab}_G(\omega)|} + \sum_{\omega\notin Z(G)} \frac{|G|}{|\mathrm{Stab}_G(\omega)|} \\ &= |Z(G)| + \sum_{\omega\notin Z(G)} \frac{|G|}{|\mathrm{Stab}_G(\omega)|} \qquad (**) \end{aligned}$$

On a maintenant deux cas :

— Il existe ω tel que $p^\alpha \mid |\mathrm{Stab}_G(\omega)|$: Alors, $|\mathrm{Stab}_G(\omega)|$ est un sous-groupe de G d'ordre strictement inférieur à $|G|$ qui vérifie bien la propriété escomptée.

— Pour tout ω, $p^\alpha \nmid |\mathrm{Stab}_G(\omega)|$: Comme $p^\alpha \mid h$, $p \mid \frac{|G|}{|\mathrm{Stab}_G(\omega)|}$ pour tout ω. D'après $(**)$, on a

$$p \mid |Z(G)|$$

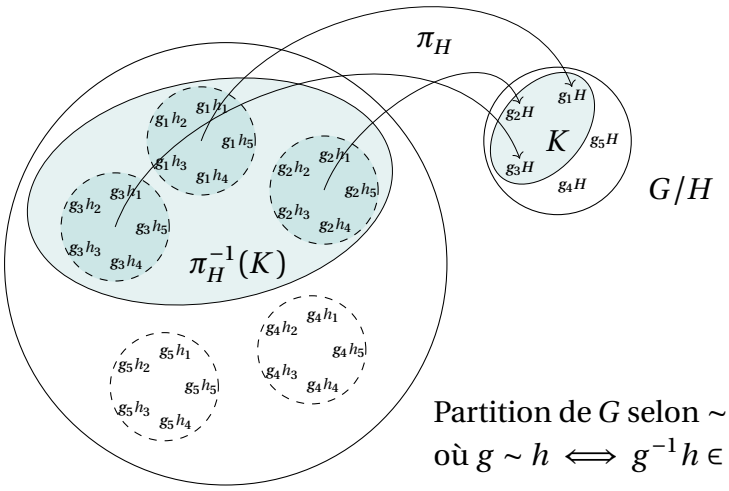
$Z(G)$ étant commutatif, on peut appliquer le Théorème 1. On obtient l'existence d'un sous-groupe H de $Z(G)$ d'ordre p, qui est de plus distingué dans G car inclus dans $Z(G)$. Alors,

$$|G/H| = \frac{|G|}{|H|} = np^{\alpha-1}$$

Il suffit maintenant d'appliquer l'hypothèse de récurrence à G/H, qui donne l'existence d'un sous-groupe K de G/H d'ordre $p^{\alpha-1}$. On considère la surjection canonique

$$\pi_H : G \to G/H$$

Alors, $\pi_H^{-1}(K) = \{g \in G \mid gH \in K\}$ est un sous-groupe de G d'ordre $|K| \times |H| = p^\alpha$:



ce qu'on voulait.

□

35 Théorème de Wantzel

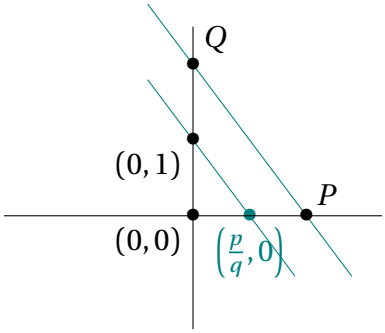
Une application sympathique de la théorie des corps en géométrie. Les arguments sont assez simples et donnent lieu à de jolies applications.

Notation 1. On note $\mathbb{E}$ l'ensemble des nombres constructibles. Tout au long du développement, on se permettra de confondre points et coordonnées.

Lemme 2. $\mathbb{E}$ contient le corps $\mathbb{Q}$.

[GOZ] p. 49

Démonstration. Tout élément $z \in \mathbb{Z}$ est constructible. Soit $(p,q) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*$. Les points $P = (p,0)$ et $Q = (0,q)$ sont constructibles. On considère la droite (d), parallèle à (PQ) passant par $(0,1)$. Cette droite est constructible, et son point d'intersection avec la droite passant par les points $(0,0)$ et $(1,0)$ est $\left(\frac{p}{q},0\right)$ par le théorème de Thalès.

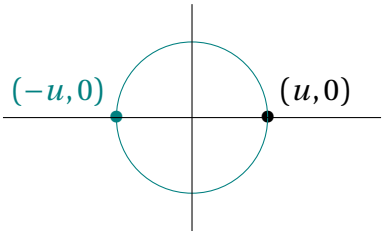


Donc $\frac{p}{q} \in \mathbb{E}$. Comme $0 \in \mathbb{E}$, on a bien $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{E}$. □

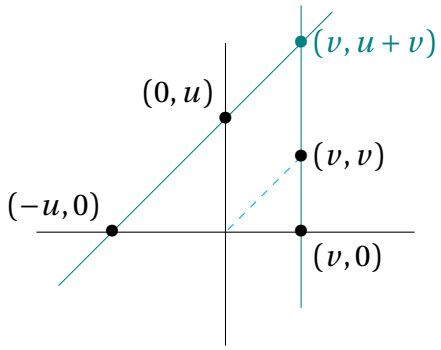
Lemme 3. $\mathbb{E}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$ stable par racine carrée.

Démonstration. Soient $u, v \in \mathbb{E}$. Commençons par montrer que $\mathbb{E}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

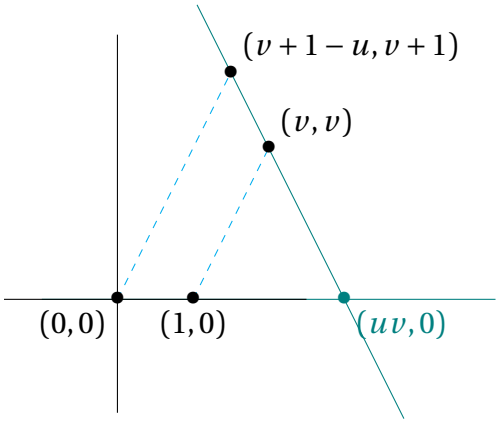
— Le point $(u,0)$ est constructible donc son symétrique $(-u,0)$ l'est aussi. Donc $-u \in \mathbb{E}$.



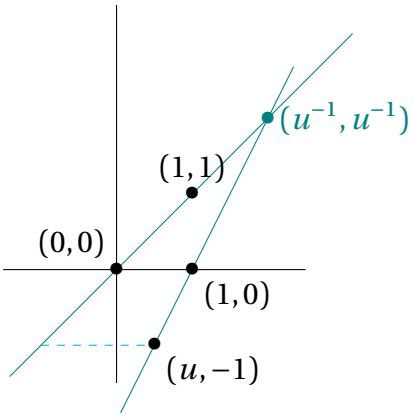
— La droite passant par les points $(0,u)$ et $(-u,0)$ et la droite passant par les points $(v,0)$ et (v,v) ont pour point d'intersection $(v,u+v)$ (par le théorème de Thalès). Donc $u+v \in \mathbb{E}$.



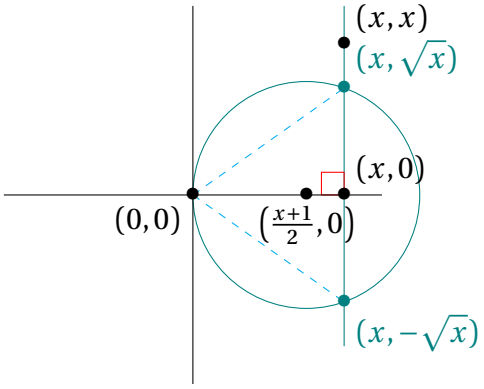
— D'après ce qui précède, $v+1$ et $v+1-u$ appartiennent à $\mathbb{E}$. La droite passant par les points $(v+1-u, v+1)$ et (u,v) et la droite passant par les points $(0,0)$ et $(1,0)$ ont pour point d'intersection $(uv,0)$ (par le théorème de Thalès). Donc $uv \in \mathbb{E}$.



— On suppose $u \neq 0$. La droite passant par les points $(1,0)$ et $(u,-1)$ et la droite passant par les points $(0,0)$ et $(1,1)$ ont pour point d'intersection (u^{-1}, u^{-1}) (par le théorème de Thalès). Donc $u^{-1} \in \mathbb{E}$.



Ainsi, $\mathbb{E}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$, qui contient $\mathbb{Q}$ par le Lemme 2. Maintenant, soit $x \in \mathbb{E}$ avec $x > 0$. Comme $\mathbb{E}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$, on a $\frac{x+1}{2} \in \mathbb{E}$. Le cercle de centre $\left(\frac{x+1}{2}, 0\right)$ passant par $(0,0)$ et la droite passant par les points $(x,0)$ et (x,x) ont pour point d'intersection $(x, \sqrt{x})$ et $(x, -\sqrt{x})$ par le théorème de Pythagore. Donc $\sqrt{x} \in \mathbb{E}$.



□

Théorème 4 (Wantzel)**.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, $\alpha \in \mathbb{E}$ si et seulement s'il existe une suite finie $(L_0, \dots, L_p)$ de sous-corps de $\mathbb{R}$ vérifiant :

(i) $L_0 = \mathbb{Q}$.

(ii) $\forall i \in [\![0, p-1]\!]$, L_{i+1} est une extension quadratique (de degré 2) de L_i.

(iii) $\alpha \in L_p$.

Démonstration. On suppose α constructible. Alors, il existe un point M tel que α est l'abscisse de M. M s'obtient à l'aide d'un nombre fini de constructions de points $M_1, \dots, M_m$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note (x_i, y_i) les coordonnées de M_i. De ce fait, on a une tour d'extension **[ULM18]** p. 103

$$\underbrace{K_0}_{=\mathbb{Q}} \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_m$$

avec $\alpha \in K_m$ et pour tout $0 \in [\![1, m-1]\!]$, $\mathbb{K}_{i+1} = K_i(x_i, y_i)$. Soit $i \in [\![1, m-1]\!]$. Montrons que $[K_{i+1} : K_i] \leq 2$. On a différents cas possibles :

— M_i est l'intersection de deux droites passant par des nombres constructibles de K_i. Alors, les coordonnées (x_i, y_i) de M_i sont solution d'un système d'équations de la forme

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

avec $a, b, c, a', b', c' \in K_i$ par construction. Donc, $x_i, y_i \in K_i$ et ainsi, $[K_{i+1} : K_i] = 1$.

— M_i est l'intersection d'une droite et d'un cercle passant par des points dont les coordonnées sont des nombres constructibles de K_i et de rayon un nombre constructible de K_i. Alors, les coordonnées (x_i, y_i) de M_i sont solution d'un système d'équations de la forme

$$\begin{cases} ax + by = c \\ (x-a')^2 + (y-b')^2 = c' \end{cases}$$

avec $a, b, c, a', b', c' \in K_i$ par construction. Raisonnons selon la nullité de a.

— Si $a \neq 0$, la première équation donne

$$x = -\frac{by + c}{a}$$

et en réinjectant dans la deuxième équation, on obtient que y_i est racine d'un polynôme de degré 2. Ainsi, $[K_i(y_i) : K_i] \leq 2$. Puisque $x_i = -\frac{by_i+c}{a} \in K_i(y_i)$, on a bien $[K_{i+1} : K_i] \leq 2$.

— Si $a = 0$, alors $y_i \in K_i$, ce qui entraîne $[K_{i+1} : K_i] = [K_i(x_i) : K_i] = 2$.

— M_i est l'intersection de deux cercles passant par des points dont les coordonnées sont des nombres constructibles de K_i et de rayon un nombre constructible de K_i. Alors, les coordonnées (x_i, y_i) de M_i sont solution d'un système d'équations de la forme

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 = c \\ (x-a')^2 + (y-b')^2 = c' \end{cases}$$

avec $a, b, c, a', b', c' \in K_i$ par construction. On soustrait la deuxième équation à la première, pour obtenir le système équivalent :

$$\begin{cases} -2(a-a')x - 2(b-b')y = c - c' - (a^2 - a'^2) - (b^2 - b'^2) \\ (x-a')^2 + (y-b')^2 = c' \end{cases}$$

ce qui nous ramène au cas précédent.

Il suffit alors d'extraire de la suite $(K_0, \dots, K_m)$ une suite $(L_0, \dots, L_p)$ strictement croissante (au sens de l'inclusion) en ne conservant dans la suite initiale que les corps extension quadratique du précédent (avec $L_0 = K_0$ et $L_p = K_n$). Obtient une suite de sous-corps de $\mathbb{R}$ (par le Lemme 3) qui remplit les trois conditions annoncées.

Réciproquement, supposons l'existence d'une suite $(L_0, \dots, L_p)$ de sous-corps de $\mathbb{R}$ répondant aux trois conditions de l'énoncé. Montrons par récurrence que

$$\forall j \in [\![0, p]\!],\ L_j \subseteq \mathbb{E}$$

— Initialisation : $L_0 = \mathbb{Q}$: cela résulte du Lemme 2.

— Hérédité : Supposons $L_j \subseteq \mathbb{E}$ pour $j \in [\![0, p-1]\!]$. Soit $x \in L_{j+1}$. Comme, par hypothèse,

$$[L_{j+1} : L_j] = 2$$

la famille $(1, x, x^2)$ est L_j-liée :

$$\exists a, b, c \in L_j \setminus \{0\} \text{ tels que } ax^2 + bx + c = 0$$

— Si $a = 0$, alors, $x = -\frac{c}{b} \in L_j$. Donc $x \in \mathbb{E}$.

— Si $a =\neq 0$, alors, $x = \frac{1}{2}(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})$. Donc, comme $\mathbb{E}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$ stable par racine carrée (cf. Lemme 3), $x \in \mathbb{E}$.

Ainsi, $L_{j+1} \subseteq \mathbb{E}$. En conclusion, $L_p \subseteq \mathbb{E}$, donc α est constructible.

□

Remarque 5. La réciproque et la conclusion du sens direct du théorème sont mieux rédigées dans **[GOZ]**, à mon avis.

Corollaire 6. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ est constructible, il existe $e \in \mathbb{N}$ tel $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2^e$.

[GOZ] p. 52

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathbb{E}$. D'après le théorème précédent, il existe une suite finie $(L_0, \dots, L_p)$ de sous-corps de $\mathbb{R}$ vérifiant :

(i) $L_0 = \mathbb{Q}$.

(ii) $\forall i \in [\![0, p-1]\!]$, L_{i+1} est une extension quadratique (de degré 2) de L_i.

(iii) $\alpha \in L_p$.

Par le théorème de la base téléscopique,

$$[L_p : \mathbb{Q}] = 2^p$$

et par ce même théorème,

$$[L_p : \mathbb{Q}] = [L_p : \mathbb{Q}(\alpha)][\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$$

et en particulier, $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ est un diviseur de 2^p : ce qu'on voulait. □

Application 7 (Duplication du cube)**.** Soit un cube de volume $\mathcal{V}$ dont on suppose son arête a constructible. Il est impossible de dessiner, à la règle et au compas, l'arête d'un cube de volume $2\mathcal{V}$.

Démonstration. On a $\mathcal{V} = a^3$ et donc $2\mathcal{V} = 2a^3$. L'arête d'un cube est la racine cubique de son volume. Il faut donc construire le nombre

$$\alpha = \sqrt[3]{2a^3} = a\sqrt[3]{2}$$

Le polynôme $P = X^3 - 2$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ (par le critère d'Eisenstein) et annule α : c'est son polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$. On a ainsi

$$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 3$$

donc α n'est pas constructible par le Corollaire 6. □

36 Théorème de Wedderburn

En utilisant les polynômes cyclotomiques, nous montrons que tout corps fini est commutatif.

Lemme 1. Soient $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ deux corps tels que $\mathbb{K}$ est commutatif et $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$. Alors $\exists d \in \mathbb{N}^*$ tel que $|\mathbb{L}| = |\mathbb{K}|^d$.

[GOU21] p. 100

Démonstration. $\mathbb{L}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie d (car $\mathbb{L}$ est fini). Donc $\mathbb{L}$ est isomorphe en tant que $\mathbb{K}$-espace vectoriel à $\mathbb{K}^d$. En particulier, $|\mathbb{L}| = |\mathbb{K}|^d$. □

Théorème 2 (Wedderburn)**.** Tout corps fini est commutatif.

Démonstration. Soit $\mathbb{K}$ un corps. L'idée va être de procéder par récurrence sur le cardinal du corps.

— Si $|\mathbb{K}| = 2$: alors $\mathbb{K} = \{0, 1\}$ est commutatif.

— On suppose le résultat vrai pour tout corps fini de cardinal strictement inférieur à $\mathbb{K}$. On veut montrer que $\mathbb{K}$ est commutatif. Supposons par l'absurde que $\mathbb{K}$ ne l'est pas. On pose

$$Z = Z(\mathbb{K}) = \{x \in \mathbb{K} \mid \forall y \in \mathbb{K},\ xy = yx\}$$

le centre de $\mathbb{K}$ dont on note q le cardinal. C'est un sous-corps de $\mathbb{K}$ qui est (par hypothèse) inclus strictement dans $\mathbb{K}$. Donc Z est commutatif, et par le Lemme 1, on peut écrire $|\mathbb{K}| = q^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Si $x \in \mathbb{K}$, on pose

$$\mathbb{K}_x = Z_{\mathbb{K}}(\{x\}) = \{y \in \mathbb{K} \mid xy = yx\}$$

Montrons que

$$\exists d \mid n \text{ tel que } |\mathbb{K}_x| = q^d \qquad (*)$$

Notons déjà encore une fois que $\mathbb{K}_x$ est un sous-corps de $\mathbb{K}$.

— Si $\mathbb{K}_x = \mathbb{K}$, on a $|\mathbb{K}_x| = |\mathbb{K}| = q^n$. Il suffit donc de prendre $d = n$.

— Sinon, $\mathbb{K}_x \subsetneq \mathbb{K}$, donc $\mathbb{K}_x$ est commutatif par hypothèse. Par le Lemme 1, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $|\mathbb{K}| = |\mathbb{K}_x|^k$.

Mais, Z est un sous-corps (commutatif) de $\mathbb{K}_x$, donc d'après le Lemme 1, il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $|\mathbb{K}_x| = |Z|^d$. Donc on a

$$q^n = |\mathbb{K}| = |\mathbb{K}_x|^k = (q^d)^k = q^{dk}$$

d'où $d \mid n$.

On considère l'action par conjugaison $\cdot$ de $\mathbb{K}$ sur lui-même $x \cdot y = xyx^{-1}$. Si $y \in \mathbb{K}^*$, alors

$$\mathrm{Stab}_y = \{x \in \mathbb{K}^* \mid x.y = y\} = \mathbb{K}_y^*$$

Soit Ω un système de représentants associé à la relation d'équivalence "être dans la même orbite". L'équation aux classes donne alors

$$|\mathbb{K}^*| = \sum_{\omega\in\Omega} \frac{|\mathbb{K}^*|}{|\mathrm{Stab}_\omega|}$$

Or,

$$\mathrm{Stab}_\omega = \mathbb{K}^* \iff \forall x \in \mathbb{K}^*, \omega x = x\omega \iff \omega \in Z^*$$

donc en notant $\Omega' = \Omega \setminus Z^*$, on a :

$$|\mathbb{K}^*| = \sum_{\omega\in Z^*} \frac{|\mathbb{K}^*|}{|\mathrm{Stab}_\omega|} + \sum_{\omega\in\Omega'} \frac{|\mathbb{K}^*|}{|\mathrm{Stab}_\omega|} = |Z^*| + \sum_{\omega\in\Omega} \frac{|\mathbb{K}^*|}{|\mathbb{K}^*_\omega|} \qquad (**)$$

Soit $\omega \in \Omega'$. Par $(*)$,

$$\exists d \mid n \text{ tel que } |\mathrm{Stab}_\omega| = |\mathbb{K}^*_\omega| = q^d - 1$$

De plus, $d \neq n$ (car $\omega \notin Z^*$). Si maintenant on pose

$$\forall d \mid n,\ \lambda_d = |\{\omega \in \Omega' \mid |\mathrm{Stab}_\omega| = q^d - 1\}|$$

on peut alors écrire en remplaçant dans $(**)$:

$$q^n - 1 = |K^*| = (q-1) + \sum_{d||n} \lambda_d \left(\frac{q^n-1}{q^d-1}\right) \qquad (***)$$

Si $d \,||\, n$, on a

$$X^n - 1 = \prod_{k|n} \Phi_k = \Phi_n \left(\prod_{k|d} \Phi_k\right)\left(\prod_{\substack{k||n\\ k\nmid d}} \Phi_k\right) = \Phi_n(X^m-1)\left(\prod_{\substack{k||n\\ k\nmid d}} \Phi_k\right)$$

Donc, $\Phi_n \mid \frac{X^n-1}{X^d-1}$ dans $\mathbb{Z}[X]$. Ceci étant vrai quelque soit d divisant strictement n, on en déduit

$$\Phi_n \mid \sum_{d||n} \lambda_d \frac{X^n-1}{X^d-1} \text{ dans } \mathbb{Z}[X]$$

Comme de plus, $\Phi_n \mid X^n - 1$ dans $\mathbb{Z}[X]$, on conclut que

$$\Phi_n \mid X^n - 1 - \sum_{d||n} \lambda_d \frac{X^n-1}{X^d-1} \text{ dans } \mathbb{Z}[X]$$

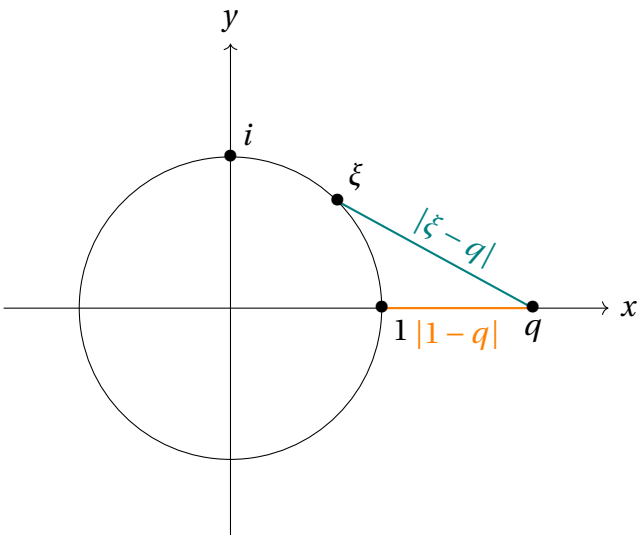
ce qui donne, une fois évalué en q :

$$\Phi_n(q) \mid q^n - 1 - \sum_{d||n} \lambda_d \frac{q^n-1}{q^d-1} \overset{(***)}{=} q - 1 \implies |\Phi_n(q)| \leq q - 1$$

Mais $n \geq 2$, donc

$$\begin{aligned} |\Phi_n(q)| &= \prod_{\xi \in \mu_n^*} |q - \xi| \\ &> \prod_{i=1}^{\varphi(n)} |q - 1| \\ &\geq |q - 1| \end{aligned}$$

On peut en effet interpréter $|q - \xi|$ comme la distance du complexe q au complexe ξ ; le premier est sur l'axe réel et est ≥ 2, le second est sur le cercle unité mais n'est pas sur l'axe réel :



cela nous permet de justifier l'inégalité stricte. On a donc une contradiction.

□

37 Théorème de Weierstrass (par la convolution)

On montre le théorème de Weierstrass par la convolution (sans forcément développer toute la théorie derrière, ce qui peut être utile dans certaines leçons).

[GOU20] p. 304

Notation 1. $\forall n \in \mathbb{N}$, on note :

$$a_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t \text{ et } p_n : t \mapsto \frac{(1-t^2)^n}{a_n} \mathbb{1}_{[-1,1]}(t)$$

Lemme 2. La suite (p_n) vérifie :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n \geq 0$.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}} p_n(t) = 1$.

(iii) $\forall \alpha > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \int_{|t|>\alpha} p_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Autrement dit, (p_n) est une **approximation positive de l'identité**.

Démonstration. Notons tout d'abord que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = 2\int_0^1 (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t \geq 2\int_0^1 t(1-t^2)^n \,\mathrm{d}t = \left[-\frac{(1-t^2)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n \geq 0$ car $a_n \geq 0$ et $(1-t^2)^n \geq 0$ pour tout $t \in [-1,1]$.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}} p_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a_n}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n \,\mathrm{d}t = 1$.

(iii) Soit $\alpha > 0$.

— Si $\alpha < 1$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{|t|\geq\alpha} p_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{a_n}\int_\alpha^1 (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t \leq \frac{2}{a_n}(1-\alpha^2)^n \leq 2(n+1)(1-\alpha^2)^n$$

et comme $|1-\alpha^2| < 1$, on a $\int_{|t|\geq\alpha} p_n(t)\,\mathrm{d}t \longrightarrow 0$.

— Si $\alpha \geq 1$:

$$\int_{|t|\geq\alpha} p_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

□

Théorème 3 (Weierstrass)**.** Toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$) est limite uniforme de fonctions polynômiales sur $[a,b]$.

Démonstration. Soit $f \in \mathscr{C}_C(\mathbb{R})$ continue. Montrons que $(f * p_n)$ converge uniformément vers f. Soit $\epsilon > 0$. Par le théorème de Heine f est uniformément continue sur son support, donc l'est aussi sur $\mathbb{R}$ entier :

$$\exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in \mathbb{R},\ |x-y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

De plus, f est bornée et atteint ses bornes (donc écrire $\|f\|_\infty$ a du sens). On peut appliquer le Lemme 2 Point (iii) :

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, \int_{|t|\geq\eta} p_n(t)\,\mathrm{d}t < \epsilon$$

Donc, toujours avec le Lemme 2, pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
|f * p_n(x) - f(x)| &\overset{(ii)}{=} \left|\int_{\mathbb{R}} f(x-t)p_n(t)\,\mathrm{d}t - f(x)\int_{\mathbb{R}} p_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}} (f(x-t)-f(x))p_n(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} |(f(x-t)-f(x))p_n(t)|\,\mathrm{d}t \\
&\overset{(i)}{=} \int_{\mathbb{R}} |f(x-t)-f(x)|\,p_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{|t|\geq\eta} |f(x-t)-f(x)|\,p_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-\eta}^{\eta} |f(x-t)-f(x)|\,p_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&= 2\|f\|_\infty\epsilon + \epsilon\int_{-\eta}^{\eta} p_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&\overset{(i)}{\leq} 2\|f\|_\infty\epsilon + \epsilon\int_{\mathbb{R}} p_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&= (2\|f\|_\infty + 1)\epsilon
\end{aligned}$$

d'où la convergence uniforme. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$. Supposons que f est à support dans $I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et montrons que pour tout $f * p_n$ est une fonction polynômiale.

$$\forall x \in I, (f * p_n)(x) = (p_n * f)(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} p_n(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (*)$$

Notons que $\forall x, t \in I, |x-t| \leq 1$, donc

$$p_n(x-t) = \frac{(1-(x-t)^2)^n}{a_n} \overset{\text{développement}}{=} \sum_{k=0}^{2n} q_k(t)x^k$$

où $\forall k \in [\![0, 2n]\!]$, q_k est une fonction polynômiale. En remplaçant dans $(*)$, on obtient :

$$\forall x \in I, (f * p_n)(x) = \sum_{k=0}^{2n}\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} q_k(t)f(t)\,\mathrm{d}t\right)x^k$$

qui est bien une fonction polynômiale sur I.

Soient maintenant $[a, b]$ un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On considère $[c, d]$ un intervalle plus grand avec $c < a$ et $b < d$ et on prolonge f par :

— Une fonction affine sur $[c, a]$ qui vaut 0 en c et $f(a)$ en a.

— Une fonction affine sur $[b, d]$ qui vaut 0 en d et $f(b)$ en b.

Et on peut encore prolonger cette fonction sur $\mathbb{R}$ tout entier en une fonction $\widetilde{f}$ telle que $\widetilde{f} = 0$ pour tout $x \notin [c, d]$. On a donc $\widetilde{f} \in \mathscr{C}_C(\mathbb{R})$. Nous allons maintenant avoir besoin du changement de

variable suivant :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} I & \to & [c,d] \\ x & \mapsto & (d-c)x + \frac{c+d}{2} \end{array}$$

Comme $\widetilde{f} \circ \varphi$ est continue, à support dans I, on peut maintenant affirmer que $\widetilde{f} \circ \varphi$ est limite uniforme d'une suite de polynômes (ρ_n). Donc $\widetilde{f}$ est limite uniforme de la suite $(\rho_n \circ \varphi^{-1})$ où $\forall n \in \mathbb{N}$, $\rho_n \circ \varphi^{-1}$ est bien une fonction polynômiale car φ (donc φ^{-1} aussi) est affine. A fortiori, $f = \widetilde{f}_{|[a,b]}$ est aussi limite de fonctions polynômiales sur $[a,b]$. □

Remarque 4. La fin de la preuve me semble mieux écrite dans **[I-P]**.

38 Théorème de Weierstrass (par les probabilités)

On montre le théorème de Weierstrass en faisant un raisonnement sur des variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli.

[G-K] p. 195

Théorème 1 (Bernstein)**.** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. On note

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, B_n(f) : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

le n-ième polynôme de Bernstein associé à f. Alors le suite de fonctions $(B_n(f))$ converge uniformément vers f.

Démonstration. Soit $x \in]0,1[$. On se place sur un espace probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et considère (X_k) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{B}(x)$. On note $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Ainsi, $S_n \sim \mathscr{B}(n,x)$ et donc par la formule de transfert,

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} = B_n(f)(x)$$

La fonction f est continue sur $[0,1]$ qui est un compact de $\mathbb{R}$, donc par le théorème de Heine ; elle y est uniformément continue. Soit donc $\epsilon > 0$,

$$\exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in [0,1], |x-y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

On a,

$$\begin{aligned}
|B_n(f)(x) - f(x)| &= \left|\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f(x)\right| \\
&= \left|\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right)\right| \\
&\leq \mathbb{E}\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \\
&\leq \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| < \eta\right\}} \left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|\right) + \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \eta\right\}} \left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|\right) \\
&\leq \mathbb{E}(\epsilon) + 2\|f\|_\infty \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \eta\right\}}\right) \\
&= \epsilon + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \eta\right) \qquad (*)
\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = x$, on peut appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \eta\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq \eta\right) \leq \frac{1}{\eta^2} \operatorname{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right)$$

Comme les X_k sont indépendantes et de même loi :

$$\mathrm{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(S_n) = \frac{1}{n}\mathrm{Var}(X_1) = \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

En réinjectant cela dans $(*)$, cela donne

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \epsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{n\eta^2}$$

qui est une majoration indépendante de x. Comme la fonction $B_n(f) - f$ est continue sur $[0,1]$, on peut passer à la borne supérieure :

$$\|B_n(f) - f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |B_n(f)(x) - f(x)| \leq \epsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{n\eta^2}$$

ce qui donne après un passage à la limite supérieure :

$$\begin{aligned} & \limsup_{n\to+\infty} \|B_n(f) - f\|_\infty \leq \epsilon \\ \overset{\epsilon\longrightarrow 0}{\Longrightarrow} & \limsup_{n\to+\infty} \|B_n(f) - f\|_\infty = 0 \\ \Longrightarrow & \lim_{n\to+\infty} \|B_n(f) - f\|_\infty = 0 \end{aligned}$$

□

Théorème 2 (Weierstrass)**.** Toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$) est limite uniforme de fonctions polynômiales sur $[a,b]$.

Démonstration. On va avoir besoin du changement de variable suivant :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & [a,b] \\ x & \mapsto & a + (b-a)x \end{array}$$

Par le Théorème 1, la fonction $f \circ \varphi$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynômiales (p_n). Donc f est limite uniforme de la suite $(p_n \circ \varphi^{-1})$ où $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n \circ \varphi^{-1}$ est bien une fonction polynômiale car φ (donc φ^{-1} aussi) est affine. □

39 Théorème des deux carrés de Fermat

Nous démontrons le théorème des deux carrés de Fermat (qui donne des conditions sur la décomposition en facteurs premiers d'un entier pour que celui-ci soit somme de deux carrés) à l'aide de l'anneau des entiers de Gauss $\mathbb{Z}[i]$.

Lemme 1. Soit $p \geq 3$ un nombre premier. Alors $x \in \mathbb{F}_p^*$ est un carré si et seulement si $x^{\frac{p-1}{2}} = 1$.

[I-P] p. 137

Démonstration. On pose $X = \{x \in \mathbb{F}_p \mid x^{\frac{p-1}{2}} = 1\}$, et on note S l'ensemble des carrés de $\mathbb{F}_p^*$. Comme un polynôme de degré d sur $\mathbb{F}_p$ possède au plus d racines, on a $|X| \leq \deg\left(X^{\frac{p-1}{2}} - 1\right) = \frac{p-1}{2}$.

D'autre part, si $x \in S$, on peut écrire $x = y^2$ et on a donc $x^{\frac{p-1}{2}} = y^{p-1} = 1$ car $|\mathbb{F}_p^*| = p-1$. Donc, $S \subseteq X$.

Pour conclure, calculons le cardinal de S. Pour cela, considérons le morphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_p^* & \to & S \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

dont le noyau est $\{x \in \mathbb{F}_p^* \mid x^2 = 1\} = \{\pm 1\}$ qui est de cardinal 2. En appliquant le premier théorème d'isomorphisme, et en considérant les cardinaux; on obtient $|S| = \frac{p-1}{2}$. Donc $S = X$. □

Introduisons maintenant des notations qui seront utiles pour la suite.

Notation 2. On note

$$N : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[i] & \to & \mathbb{N} \\ a+ib & \mapsto & a^2+b^2 \end{array}$$

et Σ l'ensemble des entiers qui sont somme de deux carrés.

Remarque 3. $n \in \Sigma \iff \exists z \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $N(z) = n$.

Lemme 4. Voici quelques propriétés sur N et $\mathbb{Z}[i]$ dont nous aurons besoin :

(i) N est multiplicative.

(ii) $\mathbb{Z}[i]^* = \{z \in \mathbb{Z}[i] \mid N(z) = 1\} = \{\pm 1, \pm i\}$.

(iii) $\mathbb{Z}[i]$ est euclidien de stathme N.

Démonstration. (i) On a $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $|zz'|^2 = |z|^2|z'|^2$ (par multiplicativité de $(.)^2$ et de $|.|$). Et N n'est que la restriction de $|.|^2$ à $\mathbb{Z}[i]$. Il est également tout-à-fait possible de montrer cette propriété par un calcul direct.

(ii) Soit $z \in \mathbb{Z}[i]^*$. On a $N(z)N(z^{-1}) = N(zz^{-1}) = N(1) = 1$. Comme N est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a $N(z) = N(z^{-1}) = 1$. En écrivant $z = a+ib$, on a $N(z) = a^2+b^2 = 1$, d'où $a = \pm 1$ ou $b = \pm 1$. Réciproquement, ± 1 et $\pm i$ sont bien inversibles dans $\mathbb{Z}[i]$ et de module 1.

(iii) Soient $z, t \in \mathbb{Z}[i]$. On pose $\frac{z}{t} = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que :

— $|x - a| \leq \frac{1}{2}$.

— $|y - b| \leq \frac{1}{2}$.

(Ces nombres existent bien, ne pas hésiter à faire un dessin pour s'en convaincre.) On pose $q = a + ib \in \mathbb{Z}[i]$, et on a

$$\left|\frac{z}{t} - q\right| = (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} < 1$$

On pose alors $r = z - qt$, et on a bien

$$z = tq + r \text{ et } N(r) = r^2 = |t^2| \left|\frac{z}{t} - q^2\right| < |t|^2 = N(t)$$

□

Lemme 5. Soit p un nombre premier. Si p n'est pas irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$, alors $p \in \Sigma$.

Démonstration. On suppose que p n'est pas irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$. On peut donc écrire $p = uv$ avec $u, v \in \mathbb{Z}[i]$ non inversibles. Ainsi,

$$p^2 = N(p) = N(uv) = \underbrace{N(u)}_{\neq 1}\underbrace{N(v)}_{\neq 1} \overset{p \text{ premier}}{\Longrightarrow} N(u) = N(v) = p$$

Par la Remarque 3, $p \in \Sigma$. □

Théorème 6 (Deux carrés de Fermat)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $n \in \Sigma$ si et seulement si $v_p(n)$ est pair pour tout p premier tel que $p \equiv 3 \mod 4$ (où $v_p(n)$ désigne la valuation p-adique de n).

Démonstration. Sens direct : On écrit $n = a^2 + b^2$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$. Soit $p \mid n$ tel que $p \equiv 3 \mod 4$. Montrons que $p \notin \Sigma$. On suppose par l'absurde que l'on peut écrire $p = c^2 + d^2$ avec $c, d \in \mathbb{Z}$. On va discerner les cas :

— Si $c \equiv \pm 1 \mod 4$, alors $c^2 \equiv 1 \mod 4$ (et de même pour d^2).

— Si $c \equiv \pm 2 \mod 4$, alors $c^2 \equiv 0 \mod 4$ (et de même pour d^2).

Donc $p = c^2 + d^2 \equiv 0, 1 \text{ ou } 2 \mod 4$: absurde. En particulier, par le Lemme 5 (en prenant la contraposée), p est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$. Comme $\mathbb{Z}[i]$ est euclidien (cf. Lemme 4), p est un élément premier de $\mathbb{Z}[i]$. Mais, $p \mid n = (a + ib)(a - ib)$. Donc $p \mid a + ib$ ou $p \mid a - ib$.Dans les deux cas, on a $p \mid a$ et $p \mid b$. Ainsi,

$$\left(\frac{a}{p}\right)^2 + \left(\frac{b}{p}\right)^2 = \frac{n}{p^2}$$

donc de deux choses l'une ; on a :

$$p^2 \mid n \text{ et } \frac{n}{p^2} \in \Sigma$$

Il suffit alors d'itérer le processus (en remplaçant n par $\frac{n}{p^2}$) k fois jusqu'à ce que p ne divise plus $\frac{n}{p^{2k}}$. On a alors $n = p^{2k}u$ avec $p \nmid u$. D'où $v_p(n) = 2k$.

Réciproque : Soit p premier tel que $p \equiv 3 \mod 4$. Alors $p^{v_p(n)} = \left(p^{\frac{v_p(n)}{2}}\right)^2$ est un carré, donc $p^{v_p(n)} \in \Sigma$.

Soit maintenant p premier tel que $p = 2$ ou $p \equiv 1 \mod 4$. Alors en conséquence du Lemme 1 (le cas $p = 2$ étant trivial), -1 est un carré de $\mathbb{F}_p$ ie. $\exists a \in \mathbb{Z}$ tel que $-1 \equiv a^2 \mod p$. Donc $p \mid a^2 + 1 = (a - i)(a + i)$. Oui mais, p ne divise ni $a - i$, ni $a + i$. Donc p n'est pas un élément premier de $\mathbb{Z}[i]$ et n'est donc pas irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$ (toujours parce que $\mathbb{Z}[i]$ est euclidien, cf. Lemme 4). En vertu du Lemme 5, $p \in \Sigma$.

Comme N est multiplicative, par la Remarque 3, on en déduit que Σ est stable par multiplication. Donc $n \in \Sigma$ (en décomposant n en produit de facteurs premiers). □

Remarque 7. Le fait qu'un élément irréductible d'un anneau euclidien est premier est une conséquence directe du lemme d'Euclide, vrai dans les anneaux factoriels (donc à fortiori aussi dans les anneaux euclidiens).

[PER] p. 48

40 Théorème des événements rares de Poisson

On établit la convergence en loi vers une loi de Poisson d'une suite de variables aléatoires.

Lemme 1. Soient $u, v \in \mathbb{C}$ de module inférieur ou égal à 1 et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$|z^n - u^n| \leq n|z-u|$$

[G-K] p. 307

Démonstration. $|z^n - u^n| = |(z-u)\sum_{k=0}^{n-1} z^k u^{n-1-k}| \leq n|z-u|$. □

Théorème 2 (des événements rares de Poisson)**.** Soit $(N_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers tendant vers l'infini. On suppose que pour tout n, $A_{n,N_1}, \dots, A_{n,N_n}$ sont des événements indépendants avec $\mathbb{P}(A_{n,N_k}) = p_{n,k}$. On suppose également que :

(i) $\lim_{n\to+\infty} s_n = \lambda > 0$ où $\forall n \in \mathbb{N}, s_n = \sum_{k=1}^{N_n} p_{n,k}$.

(ii) $\lim_{n\to+\infty} \sup_{k\in[\![1,N_n]\!]} p_{n,k} = 0$.

Alors, la suite de variables aléatoires (S_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_{n,k}}$$

converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre λ.

p. 390

Démonstration. Pour la suite, on note $\forall n \in \mathbb{N}$, $m_n = \max_{k\in[\![1,N_n]\!]} p_{n,k}$. On calcule

$$\begin{aligned}
\phi_{S_n}(t) &= \mathbb{E}\left(e^{itS_n}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(e^{it\sum_{k=1}^{N_n} \mathbb{1}_{A_{n,k}}}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{N_n} e^{it\mathbb{1}_{A_{n,k}}}\right) \\
&= \prod_{k=1}^{N_n} \mathbb{E}\left(e^{it\mathbb{1}_{A_{n,k}}}\right) \text{ par indépendance} \\
&= \prod_{k=1}^{N_n} \left(e^{it} p_{n,k} + 1 - p_{n,k}\right)
\end{aligned}$$

Ensuite, on pose

$$S'_n = \sum_{k=1}^{N_n} P_{n,k}$$

et on calcule la fonction caractéristique de cette nouvelle variable aléatoire :

$$\begin{aligned}\phi_{S'_n}(t) &= \prod_{k=1}^{N_n} \phi_{P_{n,k}}(t) \text{ par indépendance} \\ &= \prod_{k=1}^{N_n} \exp(p_{n,k}(e^{it}-1))) \\ &= \exp(s_n(e^{it}-1))\end{aligned}$$

Par différence, on obtient

$$|\phi_{S_n}(t) - \phi_{S'_n}(t)| = \left| \prod_{k=1}^{N_n} \left(e^{it}p_{n,k} + 1 - p_{n,k}\right) - \exp(s_n(e^{it}-1)) \right|$$

ce qui, après application du Lemme 1, donne l'inégalité

$$|\phi_{S_n}(t) - \phi_{S'_n}(t)| \leq \sum_{k=1}^{N_n} g(p_{n,k}(e^{it}-1))$$

avec $g : z \mapsto |e^z - 1 - z|$. Mais, par développement en série entière :

$$\begin{aligned}g(z) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} \\ &= z^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &\leq |z|^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|z|^k}{k!} \left| \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right| \\ &\leq |z|^2 \frac{e^{|z|}}{2}\end{aligned}$$

Mais, comme $|p_{n,k}(e^{it}-1) \leq 2p_{n,k} \leq 2$, on a :

$$\begin{aligned}|\phi_{S_n}(t) - \phi_{S'_n}(t)| &\leq \sum_{k=1}^{N_n} (2p_{n,k})^2 \frac{e^2}{2} \\ &= 2e^2 \sum_{k=1}^{N_n} 2p_{n,k}^2 \\ &\leq 2e^2 \underbrace{s_n}_{\longrightarrow \lambda} \underbrace{m_n}_{\longrightarrow 0} \\ &\longrightarrow 0\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}|\phi_{S_n}(t)-\exp(\lambda(e^{it}-1))| &\leq |\phi_{S_n}(t)-\phi_{S'_n}(t)|+|\phi_{S'_n}(t)-\exp(\lambda(e^{it}-1))| \\ &\leq \underbrace{|\phi_{S_n}(t)-\phi_{S'_n}(t)|}_{\longrightarrow 0}+|\underbrace{\exp(s_n(e^{it}-1))-\exp(\lambda(e^{it}-1))|}_{\longrightarrow 0 \text{ car } s_n\longrightarrow\lambda} \quad \longrightarrow 0\end{aligned}$$

et le théorème de Lévy permet de conclure. □

41 Transformée de Fourier d'une gaussienne

On calcule la transformée de Fourier d'une fonction de type gaussienne $x \mapsto e^{-ax^2}$ à l'aide du théorème intégral de Cauchy.

Proposition 1. On définit $\forall a \in \mathbb{R}_*^+$,

$$\gamma_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-ax^2} \end{array}$$

Alors,

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \widehat{\gamma_a}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{-\xi^2}{4a}}$$

[AMR08] p. 156

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}_*^+$. On a

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \widehat{\gamma_a}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x$$

et en écrivant

$$ax^2 + ix\xi = a\left(x^2 + i\frac{x\xi}{a}\right) = a\left(\left(x + i\frac{\xi}{2a}\right)^2 + \frac{\xi^2}{4a^2}\right)$$

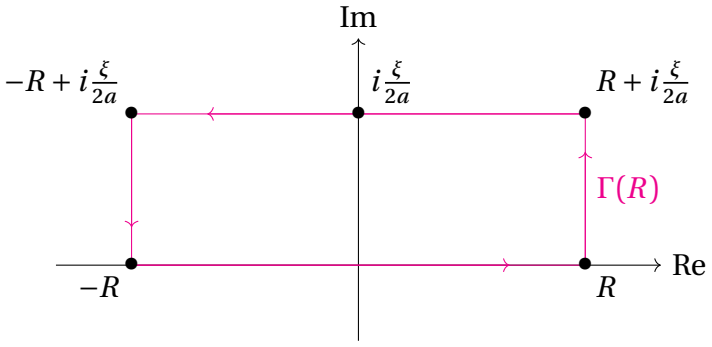
on en déduit que

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \widehat{\gamma_a}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(x+i\frac{\xi}{2a}\right)^2}\,\mathrm{d}x \qquad (*)$$

On va considérer la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & e^{-az^2} \end{array}$$

Pour $R > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$, on note $\Gamma(R)$ le rectangle de sommets $-R, R, R + i\frac{\xi}{2a}, -R + i\frac{\xi}{2a}$ parcouru dans le sens direct :



On a,

$$\underbrace{\int_{\Gamma(R)} e^{-az^2}\,\mathrm{d}z}_{=I(R)} = \underbrace{\int_{-R}^{R} e^{-az^2}\,\mathrm{d}z}_{=I_1(R)} + \underbrace{\int_{R}^{R+i\frac{\xi}{2a}} e^{-az^2}\,\mathrm{d}z}_{=I_2(R)} + \underbrace{\int_{R+i\frac{\xi}{2a}}^{-R+i\frac{\xi}{2a}} e^{-az^2}\,\mathrm{d}z}_{=I_3(R)} + \underbrace{\int_{-R+i\frac{\xi}{2a}}^{-R} e^{-az^2}\,\mathrm{d}z}_{=I_4(R)}$$

Nous allons traiter les intégrales séparément.

— Pour $I_1(R)$: On a affaire à une intégrale sur l'axe réel. Or, on connait la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \sqrt{\pi}$$

Donc en faisant le changement de variable $y = \sqrt{a}x$, on obtient :

$$\sqrt{a}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi} \iff \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

D'où :

$$I_1(R) \longrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

quand $R \longrightarrow +\infty$.

— Pour $I_2(R)$: On a :

$$\begin{aligned} &\forall z \in \left[R, R + i\frac{\xi}{2a}\right],\ z = R + it \text{ avec } t \in \left[0, \frac{\xi}{2a}\right] \\ \implies &\mathrm{d}z = i\mathrm{d}t \end{aligned}$$

D'où :

$$I_2(R) = i\int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{-a(R+it)^2}\,\mathrm{d}t$$

On en déduit,

$$\begin{aligned} |I_2(R)| &\leq \int_0^{\frac{\xi}{2a}} \left|e^{-a(R+it)^2}\right| \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\xi}{2a}} \left|e^{-a(R^2-t^2)}\right| \underbrace{|e^{i2aRt}|}_{=1}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{-a(R^2-t^2)}\,\mathrm{d}t \\ &= e^{-aR^2}\int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{at^2}\,\mathrm{d}t \\ &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

quand $R \longrightarrow +\infty$.

— Pour $I_3(R)$: On a :

$$\begin{aligned} &\forall z \in \left[R + i\frac{\xi}{2a}, -R + i\frac{\xi}{2a}\right],\ z = t + i\frac{\xi}{2a} \text{ avec } t \in [R, -R] \\ \implies &\mathrm{d}z = \mathrm{d}t \end{aligned}$$

D'où :

$$I_3(R) = \int_R^{-R} e^{-a\left(t+i\frac{\xi}{2a}\right)^2}\,\mathrm{d}t = -\int_{-R}^{R} e^{-a\left(t+i\frac{\xi}{2a}\right)^2}\,\mathrm{d}t = -e^{\frac{\xi^2}{4a}}\int_{-R}^{R} e^{-a\left(t+i\frac{\xi}{2a}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

qui est une intégrale généralisée absolument convergente. Ainsi par $(*)$,

$$I_3(R) \longrightarrow -e^{\frac{\xi^2}{4a}}\widehat{\gamma_a}(\xi)$$

quand $R \longrightarrow +\infty$.

— Pour $I_4(R)$: Ce cas-ci se traite exactement comme $I_2(R)$. On a :

$$\begin{aligned} &\forall z \in \left[-R + i\frac{\xi}{2a}, -R\right], z = -R + it \text{ avec } t \in \left[\frac{\xi}{2a}, 0\right] \\ \Longrightarrow\ &\mathrm{d}z = i\mathrm{d}t \end{aligned}$$

D'où :

$$I_4(R) = i\int_{\frac{\xi}{2a}}^{0} e^{-a(-R+it)^2}\,\mathrm{d}t = -i\int_{0}^{\frac{\xi}{2a}} e^{-a(-R+it)^2}\,\mathrm{d}t$$

On en déduit,

$$|I_4(R)| \leq \int_0^{\frac{\xi}{2a}} \left|e^{-a(-R+it)^2}\right| \mathrm{d}t = e^{-aR^2}\int_0^{\frac{\xi}{2a}} e^{at^2}\,\mathrm{d}t \longrightarrow 0$$

quand $R \longrightarrow +\infty$.

— Pour $I(R)$: La fonction $z \mapsto e^{-az^2}$ est holomorphe et le contour $\Gamma(R)$ est fermé. Donc $I(R) = 0$ en vertu du théorème intégral de Cauchy.

En passant à la limite, on obtient ainsi :

$$0 = \sqrt{\frac{\pi}{a}} + 0 - e^{\frac{\xi^2}{4a}}\widehat{\gamma_a}(\xi) + 0 \iff \widehat{\gamma_a}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{-\xi^2}{4a}}$$

□

42 Trigonalisation simultanée

Nous montrons le théorème de trigonalisation simultanée grâce à l'utilisation des applications transposées (et donc, de la dualité).

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur un corps $\mathbb{K}$.

[GOU21] p. 176

Lemme 1. Soient $g \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme trigonalisable. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par g. Alors, $g_{|F}$ est trigonalisable.

Démonstration. On note m la dimension de F. Considérons G, un supplémentaire de F dans E. Soient $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ des bases respectives de F et de G. Alors, la matrice de g dans la base de E constituée de l'union disjointe de $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

avec $A \in \mathscr{M}_m(\mathbb{K})$, qui est la matrice de l'endomorphisme induit $g_{|F}$. Remarquons que $\chi_A \mid \chi_M$. Or, g est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique $\chi_g = \chi_M$ est scindé sur $\mathbb{K}$. Dans ce cas, $\chi_A = \chi_{g_{|F}}$ l'est aussi. □

Lemme 2. Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que f et g commutent. Alors, f et g ont un vecteur propre commun.

Démonstration. f est trigonalisable, donc f admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ (cf. première colonne de la matrice de f dans une base de trigonalisation). Le sous-espace propre $E_\lambda = \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}_E)$ est alors stable par g :

$$\forall x \in \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}_E),\ (f - \lambda \operatorname{id}_E)(g(x)) = fg(x) - (\lambda \operatorname{id}_E)(g(x)) = gf(x) - g(\lambda \operatorname{id}_E(x))$$

car f, g et $\lambda \operatorname{id}_E$ commutent. Ainsi,

$$\forall x \in \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}_E),\ (f - \lambda \operatorname{id}_E)(g(x)) = g((f - \lambda \operatorname{id}_E)(x)) = 0$$

Par le Lemme 1, la restriction de g à E_λ est trigonalisable. Donc, $g_{|E_\lambda}$ admet un vecteur propre $x \in E_\lambda$ qui est, par construction, un vecteur propre commun à f et g. □

Théorème 3 (Trigonalisation simultanée)**.** Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que f et g sont trigonalisables et commutent. Alors, il existe une base de trigonalisation commune de f et g.

Démonstration. On va procéder par récurrence sur n.

— Si $n = 1$: c'est évident.

— Supposons le résultat vrai au rang $n-1$. Pour tout $\varphi \in E^*$,

$$\begin{aligned}({}^tf \circ {}^tg)(\varphi) &= {}^tf(\varphi \circ g)\\ &= \varphi \circ g \circ f\\ &= \varphi \circ f \circ g\\ &= ({}^tg \circ {}^tf)(\varphi)\end{aligned}$$

ie. ${}^tf{}^tg = {}^tf{}^tg$. Par le Lemme 2 appliqué à ${}^tf$ et ${}^tg$, il existe un vecteur propre $\psi \in E^*$ commun à ces deux endomorphismes. Le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\psi)$ est ainsi stable par ${}^tf$ et ${}^tg$. Notons

$$H = \mathrm{Vect}(\psi)^\circ = \{x \in E \mid \psi(x) = 0\} = \mathrm{Ker}(\psi)$$

c'est un hyperplan de E (donc de dimension $n-1$), qui est de plus stable par f et g. En effet, en notant $\lambda \in \mathbb{K}$ la valeur propre de f associée à ψ, on a :

$$\forall x \in H,\ \psi(f(x)) = {}^tf(\psi)(x) = \lambda\psi(x) = 0$$

et un même calcul montre la stabilité par g. D'après l'hypothèse de récurrence appliquée aux endomorphismes induits $f_{|H}$ et $g_{|H}$, on obtient une base $\mathscr{B}_H$ de H de cotrigonalisation pour $f_{|H}$ et $g_{|H}$. On la complète en une base quelconque $\mathscr{B}$ de E, dans laquelle on obtient

$$\mathrm{Mat}(f,\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} & \mathrm{Mat}(f_{|H},\mathscr{B}_H) & & * \\ & & & \vdots \\ & & & * \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{Mat}(g,\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} & \mathrm{Mat}(g_{|H},\mathscr{B}_H) & & * \\ & & & \vdots \\ & & & * \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}$$

où $\mathrm{Mat}(f_{|H},\mathscr{B}_H)$ et $\mathrm{Mat}(g_{|H},\mathscr{B}_H)$ sont triangulaires supérieures d'ordre $n-1$.

□

Bibliographie

Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels **[AMR08]**

Mohammed El-Amrani. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels. Niveau M1*. Ellipses, 28 août 2008.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3908-14232-analyse-de-fourier-dans-les-espaces-fonctionnels-niveau-m1-9782729839031.html.

Objectif agrégation **[BMP]**

Vincent Beck, Jérome Malick et Gabriel Peyré. *Objectif agrégation*. 2e éd. H&K, 22 août 2005.
https://objectifagregation.github.io.

Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries **[C-G]**

Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome 1*. Calvage & Mounet, 13 mai 2017.
http://www.calvage-et-mounet.fr/2022/05/09/nouvelles-histoires-hedoniste-de-groupes-et-de-geometrie/.

Mathématiques pour l'agrégation **[DAN]**

Jean-François Dantzer. *Mathématiques pour l'agrégation. Analyse et probabilités*. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.
https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332195-mathematiques-pour-l-agregation-analyse-et-probabilites.

Analyse numérique et équations différentielles **[DEM]**

Jean-Pierre Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles*. 4e éd. EDP Sciences, 11 mai 2016.
https://www.uga-editions.com/menu-principal/collections-et-revues/collections/grenoble-sciences/analyse-numerique-et-equations-differentielles-239866.kjsp.

Oraux X-ENS Mathématiques **[FGN2]**

Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas. *Oraux X-ENS Mathématiques. Volume 2*. 2e éd. Cassini, 16 mars 2021.
https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/111-oraux-x-ens-mathematiques-nouvelle-serie-vol-2.html.

De l'intégration aux probabilités **[G-K]**

Olivier Garet et Aline Kurtzmann. *De l'intégration aux probabilités*. 2e éd. Ellipses, 28 mai 2019.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/4593-14919-de-l-integration-aux-probabilites-2e-edition-augmentee-9782340030206.html.

Les maths en tête **[GOU20]**

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html.

Les maths en tête **[GOU21]**

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités*. 3e éd. Ellipses, 13 juill. 2021.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html.

Théorie de Galois **[GOZ]**

Ivan GOZARD. *Théorie de Galois. Niveau L3-M1*. 2e éd. Ellipses, 1er avr. 2009.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/4897-15223-theorie-de-galois-niveau-l3-m1-2e-edition-9782729842772.html.

L'oral à l'agrégation de mathématiques **[I-P]**

Lucas ISENMANN et Timothée PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements*. 2e éd. Ellipses, 26 mars 2024.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html.

Cours d'analyse fonctionnelle **[LI]**

Daniel LI. *Cours d'analyse fonctionnelle. avec 200 exercices corrigés*. Ellipses, 3 déc. 2013.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/6558-cours-danalyse-fonctionnelle-avec-200-exercices-corriges-9782729883058.html.

Cours d'algèbre **[PER]**

Daniel PERRIN. *Cours d'algèbre. pour l'agrégation*. Ellipses, 15 fév. 1996.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/7778-18110-cours-d-algebre-agregation-9782729855529.html.

Éléments d'analyse réelle **[ROM19-1]**

Jean-Étienne ROMBALDI. *Éléments d'analyse réelle*. 2e éd. EDP Sciences, 6 juin 2019.
https://laboutique.edpsciences.fr/produit/1082/9782759823789/elements-d-analyse-reelle.

Mathématiques pour l'agrégation **[ROM21]**

Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie*. 2e éd. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.
https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332201-mathematiques-pour-l-agregation-algebre-et-geometrie.

Petit guide de calcul différentiel **[ROU]**

François Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel. à l'usage de la licence et de l'agrégation.* 4e éd. Cassini, 27 fév. 2015.
https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/94-petit-guide-de-calcul-differentiel-4e-ed.html.

Anneaux, corps, résultants **[ULM18]**

Felix Ulmer. *Anneaux, corps, résultants. Algèbre pour L3/M1/agrégation.* Ellipses, 28 août 2018.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/9852-20186-anneaux-corps-resultants-algebre-pour-l3-m1-agregation-9782340025752.html.

Analyse pour l'agrégation **[Z-Q]**

Claude Zuily et Hervé Queffélec. *Analyse pour l'agrégation. Agrégation/Master Mathématiques.* 5e éd. Dunod, 26 août 2020.
https://www.dunod.com/prepas-concours/analyse-pour-agregation-agregationmaster-mathematiques.