

# Contre-exemple au théorème de Dirichlet

On construit un contre-exemple au théorème de Dirichlet qui montre l'importance de l'hypothèse  $\mathcal{C}^1$  par morceaux.

**Contre-exemple 1.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  paire,  $2\pi$ -périodique telle que :

$$\forall x \in [0, \pi], f(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \sin\left((2^{p^3} + 1) \frac{x}{2}\right)$$

Alors  $f$  est bien définie et continue sur  $\mathbb{R}$ . Cependant, sa série de Fourier diverge en 0.

[GOU20]  
p. 275

*Démonstration.*

$$\forall x \in [0, \pi], \left| \frac{1}{p^2} \sin\left((2^{p^3} + 1) \frac{x}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{p^2}$$

donc la série converge normalement sur  $[0, \pi]$ . Comme la fonction  $x \mapsto \frac{1}{p^2} \sin\left((2^{p^3} + 1) \frac{x}{2}\right)$  est continue (en tant que composée de fonctions continues), la fonction  $f$  est continue sur  $[0, \pi]$ . On prolonge  $f$  par parité en posant

$$\forall x \in [-\pi, 0[, f(x) = f(-x)$$

Ainsi prolongée,  $f$  est continue sur l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ . Comme  $f(\pi) = f(-\pi)$ , on en déduit que  $f$  est  $2\pi$ -périodique, et est donc continue sur  $\mathbb{R}$  tout entier.

Posons  $\forall k \in \mathbb{N}$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n,k} = \int_0^\pi \cos(nt) \sin\left(\frac{(2k+1)t}{2}\right) dt \text{ et } \forall q \in \mathbb{N}, s_{q,k} = \sum_{n=0}^q a_{n,k}$$

Soient  $k, n \in \mathbb{N}$ . On va chercher à minorer  $s_{n,k}$ . Pour cela, calculons explicitement  $a_{n,k}$  :

$$\begin{aligned} a_{n,k} &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin\left(\left(\frac{2k+1}{2} + n\right)t\right) + \sin\left(\left(\frac{2k+1}{2} - n\right)t\right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k+n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{k-n+\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{k+\frac{1}{2}}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 - n^2} \end{aligned}$$

Par conséquent, à  $k$  fixé,  $a_{n,k} \geq 0$  pour tout  $n \leq k$ . Donc  $s_{q,k} \geq 0$  pour tout  $q \leq k$ . Pour le cas  $q > k$ , on remarque que les  $a_{q,k}$  sont, à un facteur  $\frac{2}{\pi}$  près, les coefficients de Fourier  $a_n(g_k)$  de la fonction paire

$$g_k : t \mapsto \left| \sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)t\right) \right|$$

qui est continue et  $\mathcal{C}^1$  par morceaux. D'après le théorème de Dirichlet, sa série de Fourier converge simplement vers  $g_k$  sur  $\mathbb{R}$ . En particulier, en 0, cela donne :

$$\frac{a_{0,k}}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n,k} = \frac{\pi}{2} g_k(0) = 0$$

En faisant tendre  $q$  vers  $+\infty$ , on a ainsi :

$$s_{q,k} \longrightarrow \frac{a_{0,k}}{2}$$

Or,  $a_{n,k}$  est positif pour  $n \leq k$  et négatif pour  $n > k$ . Donc la suite  $(s_{q,k})$  est décroissante à partir de l'indice  $q = k$ . Comme elle converge vers  $\frac{a_{0,k}}{2}$ , on en déduit que

$$\forall q > k, s_{q,k} \geq \frac{a_{0,k}}{2} \geq 0$$

Il nous reste à obtenir une minoration de  $s_{k,k}$ . Or, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$s_{k,k} \geq \sum_{n=1}^k \frac{k + \frac{1}{2}}{(k + \frac{1}{2})^2 - n^2}$$

Mais, la fonction  $t \mapsto \frac{k + \frac{1}{2}}{(k + \frac{1}{2})^2 - t^2}$  est croissante. Donc par comparaison série-intégrale,

$$\begin{aligned} s_{k,k} &\geq \sum_{n=1}^k \int_{n-1}^n \frac{k + \frac{1}{2}}{(k + \frac{1}{2})^2 - t^2} dt \\ &= \int_0^k \frac{k + \frac{1}{2}}{(k + \frac{1}{2})^2 - t^2} dt \\ &= \frac{\ln(4k + 3)}{2} \\ &\geq \frac{\ln(k)}{2} \end{aligned}$$

Comme  $f$  est paire, les coefficients de Fourier  $b_n(f)$  sont nuls. Par ailleurs,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos(nt) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(nt) \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \sin\left((2^{p^3} + 1) \frac{t}{2}\right) dt \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \int_0^\pi \sin\left((2^{p^3} + 1) \frac{t}{2}\right) dt \end{aligned}$$

l'interversion somme-intégrale étant licite par convergence normale sur un segment. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} a_{n,2^{p^3}-1} \implies \forall n \in \mathbb{N}, S_n = \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^n a_k(f) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} s_{n,2^{p^3}-1}$$

Comme les  $s_{q,k}$  sont positifs et que  $s_{k,k} \geq \frac{\ln(k)}{2}$ , on en déduit

$$\forall p \in \mathbb{N}, S_{2^{p^3-1}} \geq \frac{1}{p^2} s_{2^{p^3-1}, 2^{p^3-1}} \geq \frac{1}{2p^2} \ln(2^{p^3-1}) = \frac{p^3-1}{2p^2} \ln(2) \rightarrow +\infty$$

□

# Bibliographie

Les maths en tête

[GOU20]

---

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.