Contre-exemple au théorème de Dirichlet

On construit un contre-exemple au théorème de Dirichlet qui montre l'importance de l'hypothèse $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

[GOU20] p. 275

Contre-exemple 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire, 2π-périodique telle que :

$$\forall x \in [0,\pi], f(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \sin\left((2^{p^3}+1)\frac{x}{2}\right)$$

Alors f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. Cependant, sa série de Fourier diverge en 0.

Démonstration.

$$\forall x \in [0,\pi], \left|\frac{1}{p^2} \sin\left((2^{p^3}+1)\frac{x}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{p^2}$$

donc la série converge normalement sur $[0,\pi]$. Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{p^2}\sin\left((2^{p^3}+1)\frac{x}{2}\right)$ est continue (en tant que composée de fonctions continues), la fonction f est continue sur $[0,\pi]$. On prolonge f par parité en posant

$$\forall x \in [-\pi, 0[, f(x) = f(-x)$$

Ainsi prolongée, f est continue sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$. Comme $f(\pi) = f(-\pi)$, on en déduit que f est 2π-périodique, et est donc continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Posons $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n,k} = \int_0^\pi \cos(nt)\sin\left(\frac{(2k+1)t}{2}\,\mathrm{d}t\right) \text{ et } \forall q \in \mathbb{N},\ s_{q,k} = \sum_{n=0}^{q} a_{n,k}$$

Soient $k, n \in \mathbb{N}$. On va chercher à minorer $s_{n,k}$. Pour cela, calculons explicitement $a_{n,k}$:

$$\begin{aligned} a_{n,k} &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin\left(\left(\frac{2k+1}{2}+n\right)t\right) + \sin\left(\left(\frac{2k+1}{2}-n\right)t\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{k-n+\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{k+\frac{1}{2}}{(k+\frac{1}{2})^2 - n^2} \end{aligned}$$

Par conséquent, à k fixé, $a_{n,k} \geq 0$ pour tout $n \leq k$. Donc $s_{q,k} \geq 0$ pour tout $q \leq k$. Pour le cas $q > k$, on remarque que les $a_{q,k}$ sont, à un facteur $\frac{2}{\pi}$ près, les coefficients de Fourier $a_n(g_k)$ de la fonction paire

$$g_k : t \mapsto \left|\sin\left((k+\frac{1}{2})t\right)\right|$$

qui est continue et $\mathscr{C}^1$ par morceaux. D'après le théorème de Dirichlet, sa série de Fourier converge simplement vers g_k sur $\mathbb{R}$. En particulier, en 0, cela donne :

$$\frac{a_{0,k}}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n,k} = \frac{\pi}{2} g_k(0) = 0$$

En faisant tendre q vers $+\infty$, on a ainsi :

$$s_{q,k} \longrightarrow \frac{a_{0,k}}{2}$$

Or, $a_{n,k}$ est positif pour $n \leq k$ et négatif pour $n > k$. Donc la suite $(s_{q,k})$ est décroissante à partir de l'indice $q = k$. Comme elle converge vers $\frac{a_{0,k}}{2}$, on en déduit que

$$\forall q > k,\ s_{q,k} \geq \frac{a_{0,k}}{2} \geq 0$$

Il nous reste à obtenir une minoration de $s_{k,k}$. Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$s_{k,k} \geq \sum_{n=1}^{k} \frac{k+\frac{1}{2}}{(k+\frac{1}{2})^2 - n^2}$$

Mais, la fonction $t \longmapsto \frac{k+\frac{1}{2}}{(k+\frac{1}{2})^2-t^2}$ est croissante. Donc par comparaison série-intégrale,

$$\begin{aligned}
s_{k,k} &\geq \sum_{n=1}^{k} \int_{n-1}^{n} \frac{k+\frac{1}{2}}{(k+\frac{1}{2})^2 - t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^k \frac{k+\frac{1}{2}}{(k+\frac{1}{2})^2 - t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\ln(4k+3)}{2} \\
&\geq \frac{\ln(k)}{2}
\end{aligned}$$

Comme f est paire, les coefficients de Fourier $b_n(f)$ sont nuls. Par ailleurs, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nt) \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \sin\left((2^{p^3}+1)\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \int_0^{\pi} \sin\left((2^{p^3}+1)\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

l'interversion somme-intégrale étant licite par convergence normale sur un segment. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} a_{n,2^{p^3-1}} \implies \forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{n} a_k(f) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} s_{n,2^{p^3-1}}$$

Comme les $s_{q,k}$ sont positifs et que $s_{k,k} \geq \frac{\ln(k)}{2}$, on en déduit

$$\forall p \in \mathbb{N}, S_{2^{p^3-1}} \geq \frac{1}{p^2} s_{2^{p^3-1},2^{p^3-1}} \geq \frac{1}{2p^2} \ln(2^{p^3-1}) = \frac{p^3-1}{2p^2} \ln(2) \longrightarrow +\infty$$

$\square$

Bibliographie

Les maths en tête **[GOU20]**

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse.* 3e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.
`https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html`.