

# Décomposition de Dunford

On démontre l'existence et l'unicité de la décomposition de Dunford pour tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif  $\mathbb{K}$ .

[GOU21]  
p. 203

**Théorème 1** (Décomposition de Dunford). Soit  $f \in \mathcal{E}$  un endomorphisme tel que son polynôme minimal  $\pi_f$  soit scindé sur  $\mathbb{K}$ . Alors il existe un unique couple d'endomorphismes  $(d, n)$  tel que :

- $f = d + n$ .
- $d$  est diagonalisable et  $n$  est nilpotent.
- $d \circ n = n \circ d$ .

*Démonstration.* On écrit  $\pi_f = (-1)^n \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$  et pour tout  $i$ , on note  $N_i = \text{Ker}((f - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i})$  le  $i$ -ième sous-espace caractéristique de  $f$ .

Construction : Comme  $E = N_1 \oplus \dots \oplus N_s$ , il suffit de définir  $d$  et  $n$  sur chaque  $N_i$ . On les définit pour tout  $i$  et pour tout  $x \in N_i$  comme tels :

- $d(x) = \lambda_i x \implies d|_{N_i} = \lambda_i \text{id}_{N_i}$
- $n(x) = f(x) - \lambda_i x = f(x) - d(x) \implies n = f - d$ .

Vérification :

- Les restrictions de  $d$  et  $n$  à  $N_i$  sont bien des endomorphismes car les espaces  $N_i$  sont stables par  $f$  et par  $d$  (cf. définition de  $d$ ), donc aussi par  $n = f - d$ .
- $d$  est diagonalisable et pour tout  $i$ ,  $n|_{N_i}^{\alpha_i} = 0$  (car  $\forall x \in N_i$ ,  $(f - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i}(x) = 0$  par définition de  $N_i$ ). On pose donc  $\alpha = \max_i \{\alpha_i\}$  et on a  $n|_{N_i}^{\alpha} = 0$  pour tout  $i$ , donc  $n^{\alpha} = 0$  par somme directe. Ainsi,  $n$  est nilpotent.
- Pour tout  $i$ , on a  $d|_{N_i} = \lambda_i \text{id}_E$ , donc  $n|_{N_i} \circ d|_{N_i} = d|_{N_i} \circ n|_{N_i}$  i.e.  $d$  et  $n$  commutent sur chaque  $N_i$  donc sur  $E$  tout entier.

Unicité : Soit  $(d', n')$  un autre couple d'endomorphismes de  $E$  vérifiant les hypothèses. On remarque d'abord que  $d'$  et  $f$  commutent (car  $d'$  commute avec  $d'$  et  $n'$ , donc avec  $f = d' + n'$  aussi). Pour tout  $i$ ,  $N_i$  est stable par  $d'$  (car  $\forall x \in N_i$ ,  $(f - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i}(d'(x)) = d' \circ (f - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i}(x) = 0$ ). Comme  $d|_{N_i} = \lambda_i \text{id}_{N_i}$ , on en déduit que  $d \circ d' = d' \circ d$  sur  $N_i$ . Donc c'est également vrai sur  $E$  tout entier. Ainsi,  $d$  et  $d'$  sont diagonalisables dans une même base, donc  $d - d'$  est diagonalisable.

D'autre part, comme  $n = f - d$ ,  $n' = f - d'$  et que  $d$  et  $d'$  commutent,  $n$  et  $n'$  commutent. Si on choisit  $p$  et  $q$  tels que  $n^p = n'^q = 0$ , alors :

$$(n - n')^{p+q} = \sum_{i=0}^{p+q} \binom{p+q}{i} n^i (-1)^{p+q-i} n'^{p+q-i} = 0$$

(dans chaque terme de la somme, soit  $i \geq p$ , soit  $p+q-i \geq q$ ). Donc  $n - n' = d' - d$  est nilpotent. Or nous avons montré que  $d' - d$  est diagonalisable, donc  $d' - d = 0$ . Finalement, on a  $d = d'$  et  $n = n'$ .  $\square$

*Remarque 2.* On peut démontrer que les endomorphismes  $d$  et  $n$  sont des polynômes en  $f$ .

# Bibliographie

Les maths en tête

[GOU21]

---

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 13 juill. 2021.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html>.