

Décomposition de Dunford

On démontre l'existence et l'unicité de la décomposition de Dunford pour tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif \mathbb{K} .

[GOU21]
p. 203

Théorème 1 (Décomposition de Dunford). Soit $f \in \mathcal{E}$ un endomorphisme tel que son polynôme minimal π_f soit scindé sur \mathbb{K} . Alors il existe un unique couple d'endomorphismes (d, n) tel que :

- $f = d + n$.
- d est diagonalisable et n est nilpotent.
- $d \circ n = n \circ d$.

Démonstration. On écrit $\pi_f = (-1)^n \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et pour tout i , on note $N_i = \text{Ker}((f - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i})$ le i -ième sous-espace caractéristique de f .

Construction : Comme $E = N_1 \oplus \dots \oplus N_s$, il suffit de définir d et n sur chaque N_i . On les définit pour tout i et pour tout $x \in N_i$ comme tels :

- $d(x) = \lambda_i x \implies d|_{N_i} = \lambda_i \text{id}_{N_i}$
- $n(x) = f(x) - \lambda_i x = f(x) - d(x) \implies n = f - d$.

Vérification :

- Les restrictions de d et n à N_i sont bien des endomorphismes car les espaces N_i sont stables par f et par d (cf. définition de d), donc aussi par $n = f - d$.
- d est diagonalisable et pour tout i , $n|_{N_i}^{\alpha_i} = 0$ (car $\forall x \in N_i$, $(f - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i}(x) = 0$ par définition de N_i). On pose donc $\alpha = \max_i \{\alpha_i\}$ et on a $n|_{N_i}^{\alpha} = 0$ pour tout i , donc $n^{\alpha} = 0$ par somme directe. Ainsi, n est nilpotent.
- Pour tout i , on a $d|_{N_i} = \lambda_i \text{id}_E$, donc $n|_{N_i} \circ d|_{N_i} = d|_{N_i} \circ n|_{N_i}$ i.e. d et n commutent sur chaque N_i donc sur E tout entier.

Unicité : Soit (d', n') un autre couple d'endomorphismes de E vérifiant les hypothèses. On remarque d'abord que d' et f commutent (car d' commute avec d' et n' , donc avec $f = d' + n'$ aussi). Pour tout i , N_i est stable par d' (car $\forall x \in N_i$, $(f - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i}(d'(x)) = d' \circ (f - \lambda_i \text{id}_E)^{\alpha_i}(x) = 0$). Comme $d|_{N_i} = \lambda_i \text{id}_{N_i}$, on en déduit que $d \circ d' = d' \circ d$ sur N_i . Donc c'est également vrai sur E tout entier. Ainsi, d et d' sont diagonalisables dans une même base, donc $d - d'$ est diagonalisable.

D'autre part, comme $n = f - d$, $n' = f - d'$ et que d et d' commutent, n et n' commutent. Si on choisit p et q tels que $n^p = n'^q = 0$, alors :

$$(n - n')^{p+q} = \sum_{i=0}^{p+q} \binom{p+q}{i} n^i (-1)^{p+q-i} n'^{p+q-i} = 0$$

(dans chaque terme de la somme, soit $i \geq p$, soit $p+q-i \geq q$). Donc $n - n' = d' - d$ est nilpotent. Or nous avons montré que $d' - d$ est diagonalisable, donc $d' - d = 0$. Finalement, on a $d = d'$ et $n = n'$. \square

Remarque 2. On peut démontrer que les endomorphismes d et n sont des polynômes en f .

Bibliographie

Les maths en tête

[GOU21]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités*. 3^e éd. Ellipses, 13 juill. 2021.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html>.