

# Décomposition polaire

On montre que toute matrice  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  peut s'écrire de manière unique  $M = OS$  avec  $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  et  $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ , et que l'application  $(O, S) \mapsto M$  est un homéomorphisme.

**Lemme 1.** Soit  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Alors  $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

*Démonstration.* Par le théorème spectral, on peut écrire  $S = {}^t P \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P$  avec  $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ . Si on suppose  $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ , on a  $\forall x \neq 0$ ,

$${}^t x S x = {}^t (P x) \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) (P x) > 0 \text{ car } \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

d'où le résultat.

Réciproquement, on suppose  $\forall x \neq 0, {}^t x S x > 0$ . Avec  $x = {}^t P e_1$  (où  $e_1$  désigne le vecteur dont la première coordonnée vaut 1 et les autres sont nulles),

$${}^t x S x = {}^t (P x) D (P x) = {}^t e_1 D e_1 = \lambda_1 > 0$$

Et on peut faire de même pour montrer que  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i > 0$ . □

**Lemme 2.**  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  est un fermé de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\text{GL}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ .

*Démonstration.* Pour la première assertion, il suffit de constater que

$$\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t M = M\} \cap \left( \bigcap_{x \in \mathbb{R}^n} \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t x M x \geq 0\} \right)$$

qui est une intersection de fermés (par image réciproque). Maintenant, si  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ , alors  $M$  est diagonalisable avec des valeurs propres positives ou nulles (par le théorème spectral). Mais comme  $\det(M) \neq 0$ , toutes les valeurs propres de  $M$  sont strictement positives. Donc par le Lemme 1,  $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ . □

**Théorème 3** (Décomposition polaire). L'application

$$\mu : \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \rightarrow & \text{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) & \mapsto & OS \end{array}$$

est un homéomorphisme.

*Démonstration.* Montrer qu'une application est un homéomorphisme se fait en 4 étapes : on montre qu'elle est continue, injective, surjective, et que la réciproque est elle aussi continue.

- L'application est bien définie et continue : Si  $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  et  $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ , alors  $OS \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ . De plus,  $\mu$  est continue en tant que restriction de la multiplication matricielle.

— L'application est surjective : Soit  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ . Si  $x \neq 0$ , on a

$${}^t x ({}^t M M) x = {}^t (M x) (M x) = \|M x\|_2^2 > 0$$

En particulier,  ${}^t M M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ . Par le théorème spectral, il existe  $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$  tels que  ${}^t M M = P \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1}$ . On pose alors

$$D = \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) \text{ et } S = P D P^{-1}$$

de sorte que  $S^2 = {}^t M M$ . Mais de plus,

$${}^t S = {}^t P^{-1} {}^t D {}^t P = S \implies S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

et par le Lemme 1,

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sqrt{\lambda_i} > 0 \implies S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

On pose donc  $O = M S^{-1}$  (ie.  $M = O S$ ), et on a

$${}^t O O = {}^t (M S^{-1}) M S^{-1} = {}^t S^{-1} {}^t M M S^{-1} = S^{-1} S^2 S^{-1} = I_n \implies O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$

Donc  $\mu(O, S) = M$  et  $\mu$  est surjective.

— L'application est injective : Soit  $M = O S \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  (avec  $O$  et  $S$  comme précédemment). Soit  $M = O' S'$  une autre décomposition polaire de  $M$ . Alors il vient,

$$S^2 = {}^t M M = {}^t (O' S') O' S' = {}^t S'^t O' O' S' = S'^2$$

Soit  $Q$  un polynôme tel que  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$  (les polynômes d'interpolation de Lagrange conviennent parfaitement). Alors,

$$S = P D {}^t P = P Q(D^2) {}^t P = Q(P D^2 {}^t P) = Q({}^t M M) = Q(S^2) = Q(S'^2)$$

Mais  $S'$  commute avec  $S'^2$ , donc avec  $S = Q(S'^2)$ . En particulier,  $S$  et  $S'$  sont codiagonalisables, il existe  $P_0 \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  et  $\mu_1, \dots, \mu_n, \mu'_1, \dots, \mu'_n \in \mathbb{R}$  tels que

$$S = P_0 \text{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) P_0^{-1} \text{ et } S' = P_0 \text{Diag}(\mu'_1, \dots, \mu'_n) P_0^{-1}$$

d'où :

$$\begin{aligned} S^2 = S'^2 &\implies P_0 \text{Diag}(\mu_1^2, \dots, \mu_n^2) P_0^{-1} = P_0 \text{Diag}(\mu_1'^2, \dots, \mu_n'^2) P_0^{-1} \\ &\implies \mu_i^2 = \mu_i'^2 \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ &\implies \mu_i = \mu_i' \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ car } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mu_i > 0 \\ &\implies S = S' \end{aligned}$$

Ainsi,  $O = M S^{-1} = M S'^{-1} = O'$ . Donc  $\mu$  est injective.

— L'application inverse est continue : Soit  $(M_p) \in \text{GL}_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$  qui converge vers  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ . Il s'agit de montrer que la suite  $(\mu^{-1}(M_p)) = (O_p, S_p)$  converge vers  $\mu^{-1}(M) = (O, S)$ . Comme

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  est compact, il existe  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que la suite extraite  $(O_{\varphi(p)})$  converge vers une valeur d'adhérence  $\bar{O} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ . Ainsi, la suite  $(S_{\varphi(p)})$  converge vers  $\bar{S} = \bar{O}^{-1}M$ .

Mais,  $\bar{S} = \bar{O}^{-1}M \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \cap \overline{\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$ . Donc par le Lemme 1,

$$\bar{S} \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$$

et par le Lemme 2,

$$\bar{S} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

Par unicité de la décomposition polaire, on a  $M = \bar{O}\bar{S}$ , d'où  $\bar{O} = O$  et  $\bar{S} = S$ .

□

*Remarque 4.* La preuve vaut encore dans le cas complexe (pour le groupe unitaire et les matrices hermitiennes).

# Bibliographie

**Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries**

**[C-G]**

Philippe CALDERO et Jérôme GERMONI. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome 1*. Calvage & Mounet, 13 mai 2017.

<http://www.calvage-et-mounet.fr/2022/05/09/nouvelles-histoires-hedoniste-de-groupes-et-de-geometrie/>.