# Dual de $L_p$

*Avec les propriétés hilbertiennes de $L_2$ couplées à certaines propriétés des espaces $L_p$, on montre que le dual d'un espace $L_p$ est $L_q$ pour $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, dans le cas où $p\in]1,2[$ et où l'espace est de mesure finie.*

Soit $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espace mesuré de mesure finie.

**Notation 1.** On note $\forall p\in[1,2]$, $L_p=L_p(X,\mathscr{A},\mu)$.

**Lemme 2.** Soient $p\in]1,2[$ et $f\in L_2$. Alors $f\in L_p$ telle que $\|f\|_p\leq M\|f\|_2$ où $M\geq 0$.

*Démonstration.* Comme $p\in]1,2[$, on a $\frac{2}{p}>1$. Soit $r$ tel que $\frac{p}{2}+\frac{1}{r}=1$. On applique l'inégalité de Hölder à $g=|f|^p\mathbb{1}_X$ de sorte que

$$\int_X |f|^p\,\mathrm{d}\mu=\||f|^p\mathbb{1}_X\|_1\leq \||f|^p\|_{\frac{2}{p}}\|\mathbb{1}_X\|_r\leq \mu(X)^{\frac{1}{r}}\|f\|_2^p$$

d'où le résultat. □

**Lemme 3.** Soit $p\in]1,2[$. Alors $L_2$ est dense dans $L_p$ pour la norme $\|.\|_p$.

*Démonstration.* Soit $f\in L_p$. On considère la suite de fonction $(f_n)$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N},\ f_n=f\mathbb{1}_{|f|\leq n}$$

Clairement, $(f_n)$ est une suite de $L_2$. On va chercher à appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(g_n)$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $g_n=|f_n-f|^p$ :

— $\forall n\in\mathbb{N}$, $g_n$ est mesurable.

— $(g_n)$ converge presque partout vers la fonction nulle.

— Par convexité de la fonction $x\mapsto x^p$, on a

$$|f_n-f|^p=2^p\left|\frac{f_n}{2}-\frac{f}{2}\right|^p\leq 2^{p-1}(|f|^p+|f_n|^p)\leq 2^p|f|^p\in L_1$$

On peut donc conclure

$$\|f-f_n\|_p^p=\int_X|f-f_n|^p\,\mathrm{d}\mu\longrightarrow 0$$

ce qu'il fallait démontrer. □

**Théorème 4.** L'application **[Z-Q] p. 222**

$$\varphi:\begin{array}{ll} L_q & \to (L_p)' \\ g & \mapsto \left(\varphi_g : f\mapsto \int_X fg\,\mathrm{d}\mu\right)\end{array}\qquad \text{où } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

est une isométrie linéaire surjective. C'est donc un isomorphisme isométrique.

*Démonstration.* Soit $g \in L_q$ et $f \in L_p$. L'inégalité de Hölder donne

$$|\varphi_g(f)| \leq \|g\|_q \|f\|_p$$

donc $\varphi_g \in (L_p)'$ et $|||\varphi_g||| \leq \|g\|_q$. De plus, si $g = 0$, alors $|||\varphi_g||| = \|g\|_q = 0$. On peut donc supposer $g \neq 0$.

Soit $u$ une fonction mesurable de module 1, telle que $g = u|g|$. On pose $h = \overline{u}|g|^{q-1}$. Comme $q = p(q-1)$, on a

$$\int_X |h|^p \, \mathrm{d}\mu = \int_X |g|^{(q-1)p} \, \mathrm{d}\mu = \int_X |g|^q \, \mathrm{d}\mu < +\infty$$

d'où $h \in L_p$ et $\|h\|_p^p = \|g\|_q^q = |\varphi_g(h)|$. Comme, $\frac{|\varphi_g(h)|}{\|h\|_p} \leq |||\varphi_g|||$, on a en particulier,

$$\underbrace{\int_X |g|^q \, \mathrm{d}\mu}_{=|\varphi_g(h)|} \leq |||\varphi_g||| \underbrace{\left(\int_X |g|^q \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}}_{=\|h\|_p}$$

et ainsi,

$$|||\varphi_g||| \geq \left(\int_X |g|^q \, \mathrm{d}\mu\right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\int_X |g|^q \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \|g\|_q$$

donc $|||\varphi_g||| = \|g\|_q$ et $\varphi$ est une isométrie.

Montrons qu'elle est surjective. Soit $\ell \in (L_p)'$. D'après le Lemme 2, on a $L_2 \subseteq L_p$, donc on peut considérer la restriction $\widetilde{\ell} = \ell_{|L_2}$.

$$\forall f \in L_2, \quad |\widetilde{\ell}(f)| \leq \|\ell\| \|f\|_p \leq M \|\ell\| \|f\|_2 \implies \widetilde{\ell} \in (L_2)'$$

Comme $L_2$ est un espace de Hilbert, on peut appliquer le théorème de représentation de Riesz à $\widetilde{\ell}$. Il existe $g \in L_2$ telle que

$$\forall f \in L_2, \quad \widetilde{\ell}(f) = \int_X f \overline{g} \, \mathrm{d}\mu$$

Pour conclure, il reste à montrer que $g \in L_q$ et que l'égalité précédente est vérifiée sur $L_p$. Comme dans précédemment, on considère $u$ de module 1 telle que $g = u|g|$ et on pose $f_n = \overline{u}|g|^{q-1}\mathbb{1}_{|g| \leq n} \in L_\infty \subseteq L_2$. On a

$$\int_X |g|^q \mathbb{1}_{|g| \leq n} \, \mathrm{d}\mu = \ell(f_n) \leq \|\ell\| \|f_n\|_p = \|\ell\| \left(\int_X |g|^q \mathbb{1}_{|g| \leq n} \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

D'où

$$\left(\int_X |g|^q \mathbb{1}_{|g| \leq n} \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_X |g|^q \mathbb{1}_{|g| \leq n} \, \mathrm{d}\mu\right)^{1-\frac{1}{p}} \leq \|\ell\|$$

D'après le théorème de convergence monotone, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_X |g|^q \mathbb{1}_{|g| \leq n} \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_X |g|^q \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \|g\|_q \leq \|\ell\|$$

Et en particulier, $g \in L_q$. Ainsi, on a $\forall f \in L_2$, $\ell(f) = \varphi_g(f)$. Les applications $\ell$ et $\varphi_g$ sont continues sur $L_p$ et $L_2$ est dense dans $L_p$ (par le Lemme 3), donc on a bien $\ell = \varphi_g = \varphi(g)$. □

**[LI]** p. 140

*Remarque* 5. Plus généralement, si l'on identifie $g$ et $\varphi_g$ :

— $L_q$ est le dual topologique de $L_p$ pour $p \in ]1, +\infty[$.

— $L_\infty$ est le dual topologique de $L_1$ si $\mu$ est $\sigma$-finie.

# Bibliographie


**Cours d'analyse fonctionnelle** **[LI]**

Daniel LI. *Cours d'analyse fonctionnelle. avec 200 exercices corrigés.* Ellipses, 3 déc. 2013.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/6558-cours-danalyse-fonctionnelle-avec-200-exercices-corriges-9782729883058.html.

**Analyse pour l'agrégation** **[Z-Q]**

Claude ZUILY et Hervé QUEFFÉLEC. *Analyse pour l'agrégation. Agrégation/Master Mathématiques.* 5e éd. Dunod, 26 août 2020.
https://www.dunod.com/prepas-concours/analyse-pour-agregation-agregationmaster-mathematiques.