

# Équation de Sylvester

On montre que l'équation  $AX + XB = C$  d'inconnue  $X$  admet une unique solution pour tout  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et pour tout  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  dont les valeurs propres sont de partie réelle strictement négative.

**Lemme 1.** Soit  $\|\cdot\|$  une norme d'algèbre sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , et soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice dont les valeurs propres sont de partie réelle strictement négative. Alors il existe une fonction polynômiale  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\lambda > 0$  tels que  $\|e^{tA}\| \leq e^{-\lambda t} P(t)$ .

[GOU21]  
p. 200

*Démonstration.* On fait la décomposition de Dunford de  $A : A = D + N$ . Comme  $D$  et  $N$  commutent, on a  $e^{tA} = e^{tD} e^{tN}$ . Soient  $P$  la matrice de passage donnée par la base de diagonalisation de  $D$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  ses valeurs propres. En notant  $\|\cdot\|$  la norme subordonnée à  $\|\cdot\|_\infty$  sur  $\mathbb{C}^n$ , on a  $\forall t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \|e^{tD}\| &= \|e^{tP \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1}}\| \\ &= \|P e^{t \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} P^{-1}\| \\ &\leq \underbrace{\|P\| \|P^{-1}\|}_{=\alpha} \sup_{\|x\|_\infty=1} \|\text{Diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n})x\|_\infty \\ &\leq \alpha \sup_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} e^{t\lambda_i} \\ &\leq \alpha e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

où  $\lambda > 0$  par hypothèse. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, donc il existe  $\beta > 0$  tel que  $\|e^{tD}\| \leq \beta e^{-\lambda t}$ .

Pour conclure, en notant  $r$  l'indice de nilpotence de  $N$ ,

$$\begin{aligned} \|e^{tA}\| &\leq \|e^{tD}\| \|e^{tN}\| \\ &\leq e^{-\lambda t} \underbrace{\sum_{k=0}^{r-1} \beta \frac{\|N\|^k t^k}{k!}}_{=P(t)} \end{aligned}$$

□

**Théorème 2** (Équation de Sylvester). Soient  $A$  et  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  deux matrices dont les valeurs propres sont de partie réelle strictement négative. Alors pour tout  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , l'équation  $AX + XB = C$  admet une unique solution  $X$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

[I-P]  
p. 177

*Démonstration.* Comme l'application  $\varphi : X \mapsto AX + XB$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , qui est un espace vectoriel de dimension finie, il suffit de montrer qu'elle est surjective pour obtenir l'injectivité (et donc l'unicité de la solution). Soit  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On considère le problème de Cauchy suivant d'inconnue  $Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  :

$$\begin{cases} Y' = AY + YB \\ Y(0) = C \end{cases} \quad (E)$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants (on peut voir cela notamment en calculant les produits  $AY$  et  $YB$  et en effectuant la somme; l'égalité matricielle avec  $C$  donnant le système d'équations voulu). D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire,  $(E)$  admet une unique solution définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier, que l'on note  $Y$ .

On vérifie que la solution est définie  $\forall t \in \mathbb{R}$  par  $Y(t) = \exp(tA)C \exp(tB)$ . En effet pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a :

$$Y'(t) = A \exp(tA)C \exp(tB) + \exp(tA)CB \exp(tB) = AY + YB$$

car toute matrice  $M$  commute avec son exponentielle (puisque  $\exp(M)$  est limite d'un polynôme en  $M$ ) et donc  $M$  commute aussi avec  $\exp(tM)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

On va maintenant montrer que  $X = -\int_0^{+\infty} Y(s) ds$  est la solution de l'équation de Sylvester. Pour tout  $t \geq 0$ , on intègre  $Y'$  entre 0 et  $t$  pour obtenir :

$$Y(t) - C = \int_0^t Y'(s) ds = A \times \int_0^t Y(s) ds + \int_0^t Y(s) ds \times B$$

Il ne reste donc plus qu'à montrer que  $Y(t) \rightarrow 0$  et que  $Y$  est intégrable pour conclure. Par le Lemme 1, il existe  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  et  $P_1, P_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  polynômiales tels que  $\|e^{tA}\| \leq e^{-\lambda_1 t} P_1(t)$  et  $\|e^{tB}\| \leq e^{-\lambda_2 t} P_2(t)$  pour tout  $t \geq 0$ . Ainsi, en posant  $\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2)$  et  $P = P_1 P_2$ , comme  $\|\cdot\|$  est une norme d'algèbre :

$$\|Y(t)\| = \|e^{tA} C e^{tB}\| \leq \|C\| P(t) e^{-2\lambda t}$$

En particulier, on a bien  $Y(t) \rightarrow 0$ . De plus, comme  $CP(t)e^{-2\lambda t}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$  et domine  $\|Y(t)\|$ , alors  $Y$  est aussi intégrable  $[0, +\infty[$ . Finalement, en faisant  $t \rightarrow +\infty$ , on obtient :

$$-C = A \times \int_0^{+\infty} Y(s) ds + \int_0^{+\infty} Y(s) ds \times B$$

Donc  $\varphi(X) = X$  :  $\varphi$  est surjective et  $X$  est bien la solution de l'équation de Sylvester. □

*Remarque 3.* Pour dire que toute matrice  $M$  commute avec  $\exp(M)$ , on aurait simplement pu dire que  $\exp(M)$  est un polynôme en  $M$  ie.  $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exists P \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $\exp(M) = P(M)$ .

[GOU21]  
p. 189

*Démonstration.* Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . L'ensemble  $\mathbb{C}[M] = \{P(M) \mid P \in \mathbb{C}[X]\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  qui est de dimension finie, donc  $\mathbb{C}[M]$  l'est aussi et est en particulier fermé.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $P_n = \sum_{k=0}^n \frac{M^k}{k!} \in \mathbb{C}[M]$  de sorte que  $P_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp(M)$ . Comme  $\mathbb{C}[M]$  est fermé, on en déduit que  $\exp(M) \in \mathbb{C}[M]$ . Donc  $\exists P \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $\exp(M) = P(M)$ . □

# Bibliographie

**Les maths en tête**

**[GOU21]**

---

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 13 juill. 2021.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html>.

**L'oral à l'agrégation de mathématiques**

**[I-P]**

---

Lucas ISENMANN et Timothée PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements*. 2<sup>e</sup> éd. Ellipses, 26 mars 2024.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html>.