Extrema liés

Dans ce développement, on montre l'existence et l'unicité des multiplicateurs de Lagrange liant les différentielles de plusieurs fonctions sous certaines hypothèses.

Théorème 1 (Extrema liés)**.** Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soient $f, g_1, \dots, g_r : U \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. On note $\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$. Si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$ et si les formes linéaires $\mathrm{d}(g_1)_a, \dots, \mathrm{d}(g_r)_a$ sont linéairement indépendantes, alors il existe des uniques $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ appelés **multiplicateurs de Lagrange** tels que [GOU20] p. 337

$$\mathrm{d}f_a = \lambda_1 \mathrm{d}(g_1)_a + \dots + \lambda_r \mathrm{d}(g_r)_a$$

Démonstration. Soit $s = n - r$. Identifions $\mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$ et écrivons les éléments (x, y) de $\mathbb{R}^n$ sous la forme $(x, y) = (x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_r)$. On notera également par la suite $a = (\alpha, \beta)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^s$ et $\beta \in \mathbb{R}^r$. On a déjà plusieurs informations : p. 347

— Déjà, $r \leq n$, car les formes linéaires $\mathrm{d}(g_i)_a$ forment une famille libre de $(\mathbb{R}^n)^*$, qui est de dimension n.

— De plus, si $r = n$, la démonstration est triviale car $(\mathrm{d}(g_i)_a)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est alors une base de $(\mathbb{R}^n)^*$.

Pour ces raisons, nous supposerons dans la suite $r \leq n - 1$ (ie. $s \geq 1$).

Comme $(\mathrm{d}(g_i)_a)_{i \in [\![1,r]\!]}$ est une famille libre, la matrice

$$\left(\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{i \in [\![1,r]\!] \\ j \in [\![1,s]\!]}} \quad \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(a) \right)_{\substack{i \in [\![1,r]\!] \\ j \in [\![1,r]\!]}} \right)$$

est de rang r. On peut donc extraire une sous-matrice de taille $r \times r$ inversible. Quitte à changer le nom des variables, on peut supposer que c'est la sous-matrice de droite, ie.

$$\det \left(\left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(a) \right)_{i,j \in [\![1,r]\!]} \right) \neq 0 \tag{$*$}$$

On va appliquer le théorème des fonctions implicites à la fonction $g = (g_1, \dots, g_r)$. Pour cela, on vérifie les hypothèses :

— g est de classe $\mathscr{C}^1$.

— $g(\alpha, \beta) = 0$ car $(\alpha, \beta) = a \in \Gamma$.

— La différentielle partielle $\mathrm{d}_y g_a$ est inversible par $(*)$.

Ainsi, il existe :

— U' voisinage de α dans $\mathbb{R}^s$.

— V' voisinage de β dans $\mathbb{R}^r$.

— $\varphi : U' \to V'$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\varphi(\alpha) = \beta$ et $\forall (x, y) \in U' \times V'$, $(x, y) \in \Gamma \iff g(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x)$.

En d'autres termes, sur un voisinage de a, les éléments de Γ s'écrivent $(x, \varphi(x))$. On pose maintenant $u : x \mapsto (x, \varphi(x))$ et $h = f \circ u$. Par composition, h est différentiable en α et

$$0 \overset{\alpha \text{ extremum de } h}{=} \mathrm{d}h_\alpha = \mathrm{d}(f \circ u)_\alpha = \mathrm{d}f_{u(\alpha)} \circ \mathrm{d}u_\alpha = \mathrm{d}f_a \circ \mathrm{d}u_\alpha$$

En termes de matrices, cela donne :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right)_{j \in [\![1,s]\!]} & \left(\frac{\partial f}{\partial y_j}(a)\right)_{j \in [\![1,r]\!]} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_s \\ \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(\alpha)\right)_{\substack{i \in [\![1,r]\!] \\ j \in [\![1,s]\!]}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \sum_{k=1}^r \frac{\partial f}{\partial y_k}(a) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}(\alpha) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_s}(a) + \sum_{k=1}^r \frac{\partial f}{\partial y_k}(a) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_s}(\alpha) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

On aboutit à la relation suivante :

$$\forall i \in [\![1,s]\!], \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{k=1}^r \frac{\partial f}{\partial y_k}(a) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\alpha) = 0 \qquad (**)$$

Comme $\forall j \in [\![1,r]\!]$, $g_j(\alpha, \varphi(\alpha)) = g_j(a) = 0$, on peut aboutir de la même manière à la relation suivante :

$$\forall i \in [\![1,s]\!], \forall j \in [\![1,r]\!], \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a) + \sum_{k=1}^r \frac{\partial g_j}{\partial y_k}(a) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}(\alpha) = 0 \qquad (***)$$

On considère maintenant la matrice M suivante :

$$M = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right)_{j \in [\![1,s]\!]} & \left(\frac{\partial f}{\partial y_j}(a)\right)_{j \in [\![1,r]\!]} \\ \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{i \in [\![1,r]\!] \\ j \in [\![1,s]\!]}} & \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_j}(a)\right)_{\substack{i \in [\![1,r]\!] \\ j \in [\![1,r]\!]}} \end{pmatrix}$$

Par $(**)$ et $(***)$, les s premiers vecteurs colonnes de cette matrice s'expriment linéairement en fonction de ses r derniers. Donc $\mathrm{rang}(M) \leq r$. Mais, le rang des vecteurs lignes d'une matrice est égal au rang de ses vecteurs colonnes. Donc les $r+1$ vecteurs lignes de M forment une famille liée. Mais par hypothèse, les r dernières lignes sont libres. Donc la première ligne est combinaison linéaire des r dernières, ce qui se réécrit :

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R} \text{ tels que } \mathrm{d}f_a = \lambda_1 \mathrm{d}(g_1)_a + \dots + \lambda_r \mathrm{d}(g_r)_a$$

L'unicité est claire car $(\mathrm{d}(g_i)_a)_{i \in [\![1,r]\!]}$ est une famille libre. □

Remarque 2. Attention à la rigueur et à la propreté dans cette démonstration. On peut très vite se perdre si l'on va trop vite ou si l'on ne prend pas le temps de bien écrire chaque donnée.

[BMP]
p. 20

Remarque 3. Il paraît que le jury n'aime pas beaucoup cette démonstration. Si vous la proposez, soyez sûr de pouvoir en donner une interprétation géométrique : grâce à la condition d'indépendance des $\mathrm{d}(g_i)_a$, Γ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ autour du point a. D'autre part,

$$\mathrm{d}f_a = \lambda_1 \mathrm{d}(g_1)_a + \cdots + \lambda_r \mathrm{d}(g_r)_a \iff \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(\mathrm{d}(g_i)_a) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathrm{d}f_a) \tag{$*$}$$

En particulier, $\mathrm{d}f_a$ est nulle sur $\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(\mathrm{d}(g_i)_a)$. Or, l'espace tangent en a à la sous-variété $\{x \text{ proche de } a \mid g_1(x) = \cdots = g_r(x) = 0\}$ est justement $\{h \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{d}(g_1)_a(h) = \cdots = \mathrm{d}(g_r)_a(h) = 0\}$.

Bref, la condition $(*)$ exprime que $\mathrm{d}f_a$ est nulle sur le plan tangent à Γ en a. Ceci équivaut aussi à ce que ∇f_a soit orthogonal à l'espace tangent à Γ en a. Ainsi, la seule manière de rendre f plus petit serait de "sortir de Γ".

Bibliographie

Objectif agrégation [BMP]

Vincent BECK, Jérome MALICK et Gabriel PEYRÉ. *Objectif agrégation*. 2e éd. H&K, 22 août 2005. https://objectifagregation.github.io.

Les maths en tête [GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3e éd. Ellipses, 21 avr. 2020. https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html.