Formes de Hankel

Le but de ce développement est de construire une forme quadratique permettant de dénombrer les racines réelles distinctes d'un polynôme en fonction de ses racines complexes.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n. [C-G] p. 356

Théorème 1 (Formes de Hankel)**.** On note $x_1, \dots, x_t$ les racines complexes de P de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_t$. On pose

$$s_0 = n \text{ et } \forall k \geq 1,\ s_k = \sum_{i=1}^{t} m_i x_i^k$$

Alors :

(i) $\sigma = \sum_{i,j \in [\![0,n-1]\!]} s_{i+j} X_i X_j$ définit une forme quadratique sur $\mathbb{C}^n$ ainsi qu'une forme quadratique $\sigma_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}^n$.

(ii) Si on note (p,q) la signature de $\sigma_{\mathbb{R}}$, on a :

— $t = p + q$.

— Le nombre de racines réelles distinctes de P est $p - q$.

Démonstration. σ est un polynôme homogène de degré 2 sur $\mathbb{C}$ (car la somme des exposants est 2 pour chacun des monômes), qui définit donc une forme quadratique sur $\mathbb{C}^n$. De plus, on peut écrire :

$$\forall k \geq 1,\ s_k = \sum_{\substack{x \text{ racine de P} \\ x \in \mathbb{R}}} m_k x^k + \sum_{\substack{x \text{ racine de P} \\ x \in \mathbb{C}}} m_k (x^k + \overline{x}^k)$$

donc $s_k = \overline{s_k}$ ie. $s_k \in \mathbb{R}$. Donc σ définit une forme quadratique $\sigma_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}^n$. D'où le premier point.

Soit φ_k la forme linéaire sur $\mathbb{C}^n$ définie par le polynôme homogène de degré 1

$$P_k(X_0, \dots, X_{n-1}) = X_0 + x_k X_1 + \dots + x_k^{n-1} X_{n-1}$$

pour $k \in [\![0,t]\!]$. Dans la base duale $(e_i^*)_{i \in [\![0,n-1]\!]}$ de la base canonique $(e_i)_{i \in [\![0,n-1]\!]}$ de $\mathbb{C}^n$, on a

$$\varphi_k = e_0^* + x_k e_1^* + \dots + x_k^{n-1} e_{n-1}^*$$

Et comme

$$\det((\varphi_k)_{k \in [\![0,t]\!]}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_t \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \dots & x_t^{n-1} \end{vmatrix} \overset{\text{Vandermonde}}{\neq} 0$$

la famille $(\varphi_k)_{k \in [\![0,t]\!]}$ est de rang t sur $\mathbb{C}$. Or, le coefficient de $X_i X_j$ dans $\sum_{k=1}^t m_k \varphi_k^2$ vaut

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^t m_k x_k^{2i} = s_{i+j} & \text{si } i = j \\ \sum_{k=1}^t 2 m_k x_k^i x_k^j = \sum_{k=1}^t 2 m_k x_k^{i+j} = 2 s_{i+j} & \text{sinon} \end{cases}$$

donc, $\sigma = \sum_{k=1}^{t} m_k \varphi_k^2$. En particulier, $\operatorname{rang}(\sigma) = t$ par indépendant des φ_k. On en déduit,

$$p + q = \operatorname{rang}(\sigma) = \operatorname{rang}(\sigma_{\mathbb{R}}) = t$$

(le rang est invariant par extension de corps).

Soit $k \in [\![0, t]\!]$. Calculons la signature de la forme quadratique $\varphi_k^2 + \overline{\varphi_k}^2$:

— Si $x_k \in \mathbb{R}$, on a $\varphi_k^2 + \overline{\varphi_k}^2 = 2\varphi_k^2$, qui est de signature $(1,0)$ car $\varphi_k \neq 0$.

— Si $x_k \notin \mathbb{R}$, on a $\varphi_k^2 + \overline{\varphi_k}^2 = 2\operatorname{Re}(\varphi_k)^2 - 2\operatorname{Im}(\varphi_k)^2$ qui est bien une forme quadratique réelle. Et $x_k = \overline{x_k}$, donc la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_k & \overline{x_k} \\ \vdots & \vdots \\ x_k^{n-1} & \overline{x_k}^{n-1} \end{pmatrix}$$

est de rang 2 (cf. le mineur correspondant aux deux premières lignes). Donc φ_k et $\overline{\varphi_k}$ sont indépendantes. Ainsi, $\operatorname{rang}(\varphi_k^2 + \overline{\varphi_k}^2) = 2$ sur $\mathbb{C}$, donc sur $\mathbb{R}$ aussi (toujours par invariance du rang par extension de corps). Donc la signature de $\varphi_k^2 + \overline{\varphi_k}^2$ est $(1,1)$.

Maintenant, regroupons les φ_k conjuguées entre elles lorsqu'elles ne sont pas réelles :

$$\sigma = \sum_{\substack{k=1 \\ x_k \in \mathbb{R}}}^{t} m_k \varphi_k^2 + \sum_{\substack{k=1 \\ x_k \notin \mathbb{R}}}^{t} m_k (\varphi_k^2 + \overline{\varphi_k}^2)$$

En passant à la signature, on obtient :

$$(p,q) = (r,0) + \left(\frac{t-r}{2}, \frac{t-r}{2}\right) = \left(\frac{t+r}{2}, \frac{t-r}{2}\right)$$

où r désigne le nombre de racines réelles distinctes de P. Par unicité de la signature d'une forme quadratique réelle, on a bien $p - q = r$. D'où le point (ii). □

Remarque 2. Tout l'intérêt de ces formes quadratiques est qu'on peut calculer les s_k par récurrence en utilisant les polynômes symétriques élémentaires, sans avoir besoin des racines.

Proposition 3 (Sommes de Newton)**.** On pose $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Les sommes de Newton vérifient les relations suivantes : **[GOU21]** p. 86

(i) $s_0 = n$.

(ii) $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $s_k = -k a_{n-k} \sum_{i=1}^{k-1} s_i a_{n-k+i}$.

(iii) $\forall p \in \mathbb{N}$, $s_{p+n} = \sum_{i=1}^{n} s_i a_{p+n-i}$.

Bibliographie

Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries **[C-G]**

Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome 1*. Calvage & Mounet, 13 mai 2017.
http://www.calvage-et-mounet.fr/2022/05/09/nouvelles-histoires-hedoniste-de-groupes-et-de-geometrie/.

Les maths en tête **[GOU21]**

Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités*. 3e éd. Ellipses, 13 juill. 2021.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html.