

Intégrale de Dirichlet

Il s'agit ici de calculer l'intégrale de Dirichlet en utilisant les théorèmes classiques d'intégration.

Lemme 1.

$$\forall y, t \in \mathbb{R}^+, |e^{-(y-i)t}| \leq 1$$

Démonstration. Soient $y, t \in \mathbb{R}^+$. On a :

$$|e^{-(y-i)t}| = |e^{-yt} e^{it}| = |e^{-yt}| |e^{it}|$$

Or, e^{it} est un complexe de module 1 et $yt \geq 0$, donc $e^{-yt} \leq 1$. D'où le résultat. \square

Théorème 2 (Intégrale de Dirichlet). On pose $\forall x \geq 0$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt$$

alors :

- (i) F est bien définie et est continue sur \mathbb{R}^+ .
- (ii) F est dérivable sur \mathbb{R}_*^+ et $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.
- (iii) $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

[G-K]
p. 107

Démonstration. Posons $\forall x \in \mathbb{R}^+$ et $\forall t \in \mathbb{R}_*^+, f(x, t) = \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}$ ainsi que $\forall n \geq 1, F_n(x) = \int_0^n \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt$.
On a :

- $\forall x \geq 0, t \mapsto f(x, t)$ est mesurable.
- Presque partout en $t > 0, x \mapsto f(x, t)$ est continue.
- $\forall x \geq 0$ et presque partout en $t > 0, |f(x, t)| \leq 1$, et $t \mapsto 1$ est intégrable sur $[0, n]$.

On peut donc appliquer le théorème de continuité sous l'intégrale pour conclure que F_n est continue sur \mathbb{R}^+ .

Soient $x \geq 0$ et $q \geq p \geq N \geq 0$. On a :

$$\begin{aligned}
 |F_q(x) - F_p(x)| &= \left| \int_p^q f(x, t) dt \right| \\
 &= \left| \operatorname{Im} \left(\int_p^q e^{-xt} \frac{e^{it}}{t} dt \right) \right| \\
 &\leq \left| \int_p^q \frac{e^{-(x-i)t}}{t} dt \right| \\
 &= \frac{1}{|x-i|} \left| \int_p^q (x-i) \frac{e^{-(x-i)t}}{t} dt \right| \\
 &\leq \left| \int_p^q (x-i) \frac{e^{-(x-i)t}}{t} dt \right| \\
 &= \left| \int_p^q -(x-i) e^{-(x-i)t} \frac{1}{t} dt \right|
 \end{aligned}$$

Nous allons réaliser une intégration par parties. Pour cela, posons :

$$\begin{aligned}
 - u'(t) &= -(x-i)e^{-(x-i)t} \implies u(t) = e^{-(x-i)t} \\
 - v(t) &= \frac{1}{t} \implies v'(t) = -\frac{1}{t^2}
 \end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
 \left| \int_p^q (x-i) \frac{e^{-(x-i)t}}{t} dt \right| &= \left| [u(t)v(t)]_p^q - \int_p^q u(t)v'(t) dt \right| \\
 &= \left| \frac{e^{-(q-i)t}}{q} - \frac{e^{-(p-i)t}}{p} + \int_p^q \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2} dt \right|
 \end{aligned}$$

On applique maintenant le Lemme 1 :

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{e^{-(q-i)t}}{q} - \frac{e^{-(p-i)t}}{p} + \int_p^q \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2} dt \right| &\leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \int_p^q \frac{1}{t^2} dt \\
 &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \left[\frac{1}{t} \right]_p^q \\
 &\leq \frac{2}{N}
 \end{aligned}$$

D'où :

$$|F_q(x) - F_p(x)| \leq \frac{2}{N}$$

Donc la suite de fonctions continues (F_n) vérifie le critère de Cauchy uniforme, et converge ainsi vers F uniformément. En particulier, F est continue sur \mathbb{R}^+ .

Soit $a > 0$. f est dérivable par rapport à x et pour tout $x \in]a, +\infty[$ et $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = |-\sin(t)e^{-xt}| \leq e^{-at}$$

On applique le théorème de dérivation sous l'intégrale, qui donne :

$$\forall x \in]a, +\infty[, F'(x) = \int_0^{+\infty} -\sin(t)e^{-xt} dt$$

En particulier, c'est vrai sur \mathbb{R}_*^+ car la dérivabilité est une propriété locale. Or $\forall A > 0$, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^A e^{-(i+x)t} dt &= \frac{1 - e^{-(i+x)A}}{i+x} \\ \Rightarrow \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-(i+x)t} dt &= \frac{1}{i+x} = \frac{-i+x}{1+x^2} \\ \Rightarrow \operatorname{Im} \left(\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-(i+x)t} dt \right) &= \operatorname{Im} \left(\frac{-i+x}{1+x^2} \right) = -\frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

Or,

$$\operatorname{Im} \left(\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-(i+x)t} dt \right) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \operatorname{Im} (e^{-(i+x)t}) dt = \int_0^{+\infty} -\sin(t)e^{-xt} dt = F'(x)$$

En recollant les deux morceaux :

$$F'(x) = -\frac{1}{1+x^2} \quad (*)$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}_*^+$. En intégrant (*) entre x et y , on obtient :

$$F(x) - F(y) = \arctan(x) - \arctan(y)$$

Mais,

$$\begin{aligned} |F(y)| &= \left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-yt} dt \right| \\ &\leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin(t)}{t} e^{-yt} \right| dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} e^{-yt} dt \\ &= \frac{1}{y} \\ &\longrightarrow_{y \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Il suffit donc de faire tendre y vers $+\infty$ pour obtenir :

$$\forall x > 0, F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$$

Ce qui, en faisant tendre x vers 0, donne :

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

□

Bibliographie

De l'intégration aux probabilités

[G-K]

Olivier GARET et Aline KURTZMANN. *De l'intégration aux probabilités*. 2^e éd. Ellipses, 28 mai 2019.
<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/4593-14919-de-l-integration-aux-probabilites-2e-edition-augmentee-9782340030206.html>.