Intégrale de Dirichlet

Il s'agit ici de calculer l'intégrale de Dirichlet en utilisant les théorèmes classiques d'intégration.

Lemme 1.

$$\forall y, t \in \mathbb{R}^+, |e^{-(y-i)t}| \leq 1$$

Démonstration. Soient $y, t \in \mathbb{R}^+$. On a :

$$|e^{-(y-i)t}| = |e^{-yt}e^{it}| = |e^{-yt}||e^{it}|$$

Or, e^{it} est un complexe de module 1 et $yt \geq 0$, donc $e^{-yt} \leq 1$. D'où le résultat. □

Théorème 2 (Intégrale de Dirichlet)**.** On pose $\forall x \geq 0$, [G-K] p. 107

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} \, \mathrm{d}t$$

alors :

(i) F est bien définie et est continue sur $\mathbb{R}^+$.

(ii) F est dérivable sur $\mathbb{R}^+_*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^+_*$, $F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.

(iii) $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

Démonstration. Posons $\forall x \in \mathbb{R}^+$ et $\forall t \in \mathbb{R}^+_*$, $f(x,t) = \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}$ ainsi que $\forall n \geq 1$, $F_n(x) = \int_0^n f(x,t) \, \mathrm{d}t$. p. 478
On a :

— $\forall x \geq 0$, $t \mapsto f(x,t)$ est mesurable.

— Presque partout en $t > 0$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue.

— $\forall x \geq 0$ et presque partout en $t > 0$, $|f(x,t)| \leq 1$, et $t \mapsto 1$ est intégrable sur $[0, n]$.

On peut donc appliquer le théorème de continuité sous l'intégrale pour conclure que F_n est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Soient $x \geq 0$ et $q \geq p \geq N \geq 0$. On a :

$$\begin{aligned}
|F_q(x) - F_p(x)| &= \left| \int_p^q f(x,t)\,\mathrm{d}t \right| \\
&= \left| \mathrm{Im}\left(\int_p^q e^{-xt} \frac{e^{it}}{t}\,\mathrm{d}t \right) \right| \\
&\leq \left| \int_p^q \frac{e^{-(x-i)t}}{t}\,\mathrm{d}t \right| \\
&= \frac{1}{|x-i|} \left| \int_p^q (x-i) \frac{e^{-(x-i)t}}{t}\,\mathrm{d}t \right| \\
&\leq \left| \int_p^q (x-i) \frac{e^{-(x-i)t}}{t}\,\mathrm{d}t \right| \\
&= \left| \int_p^q -(x-i) e^{-(x-i)t} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \right|
\end{aligned}$$

Nous allons réaliser une intégration par parties. Pour cela, posons :

— $u'(t) = -(x-i)e^{-(x-i)t} \implies u(t) = e^{-(x-i)t}$

— $v(t) = \frac{1}{t} \implies v'(t) = -\frac{1}{t^2}$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\left| \int_p^q (x-i) \frac{e^{-(x-i)t}}{t}\,\mathrm{d}t \right| &= \left| [u(t)v(t)]_p^q - \int_p^q u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t \right| \\
&= \left| \frac{e^{-(x-i)q}}{q} - \frac{e^{-(x-i)p}}{p} + \int_p^q \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}\,\mathrm{d}t \right|
\end{aligned}$$

On applique maintenant le Lemme 1 :

$$\begin{aligned}
\left| \frac{e^{-(x-i)q}}{q} - \frac{e^{-(x-i)p}}{p} + \int_p^q \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}\,\mathrm{d}t \right| &\leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \int_p^q \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - \left[\frac{1}{t} \right]_p^q \\
&\leq \frac{2}{N}
\end{aligned}$$

D'où :

$$|F_q(x) - F_p(x)| \leq \frac{2}{N}$$

Donc la suite de fonctions continues (F_n) vérifie le critère de Cauchy uniforme, et converge ainsi vers F uniformément. En particulier, F est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Soit $a > 0$. f est dérivable par rapport à x et pour tout $x \in]a, +\infty[$ et $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| = |-\sin(t) e^{-xt}| \leq e^{-at}$$

On applique le théorème de dérivation sous l'intégrale, qui donne :

$$\forall x \in]a,+\infty[, F'(x) = \int_0^{+\infty} -\sin(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

En particulier, c'est vrai sur $\mathbb{R}_*^+$ car la dérivabilité est une propriété locale. Or $\forall A > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
&\int_0^A e^{-(i+x)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1-e^{-(i+x)A}}{i+x} \\
\Longrightarrow\ &\lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-(i+x)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{i+x} = \frac{-i+x}{1+x^2} \\
\Longrightarrow\ &\mathrm{Im}\left(\lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-(i+x)t}\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{-i+x}{1+x^2}\right) = -\frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

Or,

$$\mathrm{Im}\left(\lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-(i+x)t}\,\mathrm{d}t\right) = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A \mathrm{Im}\left(e^{-(i+x)t}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} -\sin(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t = F'(x)$$

En recollant les deux morceaux :

$$F'(x) = -\frac{1}{1+x^2} \tag{$*$}$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}_*^+$. En intégrant $(*)$ entre x et y, on obtient :

$$F(x) - F(y) = \arctan(x) - \arctan(y)$$

Mais,

$$\begin{aligned}
|F(y)| &= \left|\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}e^{-yt}\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin(t)}{t}e^{-yt}\right|\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^{+\infty} e^{-yt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{y} \\
&\longrightarrow_{y\to+\infty} 0
\end{aligned}$$

Il suffit donc de faire tendre y vers $+\infty$ pour obtenir :

$$\forall x > 0, F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$$

Ce qui, en faisant tendre x vers 0, donne :

$$F(0) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

□

Bibliographie

De l’intégration aux probabilités **[G-K]**

Olivier GARET et Aline KURTZMANN. *De l’intégration aux probabilités.* 2e éd. Ellipses, 28 mai 2019. https://www.editions-ellipses.fr/accueil/4593-14919-de-l-integration-aux-probabilites-2e-edition-augmentee-9782340030206.html.