

## Lemme de Morse

En usant (certains diront plutôt "en abusant") du théorème d'inversion locale, on montre le lemme de Morse et on l'applique à l'étude de la position d'une surface par rapport à son plan tangent.

**Notation 1.** Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une application dont toutes les dérivées secondes existent, on note  $\text{Hess}(f)_a$  la hessienne de  $f$  au point  $a$ .

**Lemme 2.** Soit  $A_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  inversible. Alors il existe un voisinage  $V$  de  $A_0$  dans  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et une application  $\psi : V \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que

$$\forall A \in V, A = {}^t\psi(A)A_0\psi(A)$$

*Démonstration.* On définit l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tMA_0M \end{array}$$

qui est une application polynômiale en les coefficients de  $M$ , donc de classe  $\mathcal{C}^1$ . Soit  $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On calcule :

$$\begin{aligned} \varphi(I_n + H) - \varphi(I_n) &= {}^tHA_0 + A_0H + {}^tHA_0 + H \\ &= {}^t(A_0H) + A_0H + o(\|H\|^2) \end{aligned}$$

où  $(\|\cdot\|)$  désigne une quelconque norme d'algèbre sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Ainsi, on a  $d\varphi_{I_n}(H) = {}^t(A_0H) + A_0H$ . D'où

$$\text{Ker}(d\varphi_{I_n}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A_0M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})\} = A_0^{-1}\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

On définit donc

$$F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A_0M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\} = A_0^{-1}\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

et on a  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = F \oplus \text{Ker}(d\varphi_{I_n})$ . Ainsi, la différentielle  $d(\varphi|_F)_{I_n}$  est bijective (car  $\text{Ker}(d(\varphi|_F)_{I_n}) = \text{Ker}(d\varphi_{I_n}) \cap F = \{0\}$ ).

On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale à  $\varphi|_F$  : il existe  $U$  un voisinage ouvert de  $I_n$  dans  $F$  tel que  $(\varphi|_U)$  soit  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $U$  sur  $V = \varphi(U)$ . De plus, on peut supposer  $U \subseteq \text{GL}_n(\mathbb{R})$  (quitte à considérer  $U \cap U'$  où  $U'$  est un voisinage ouvert de  $I_n$  dans  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  ; qui existe par continuité de  $\det$ ).

Ainsi,  $V$  est un voisinage ouvert de  $A_0 = \varphi(I_n)$  dans  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  vérifiant :

$$\forall A \in V, A = {}^t(\varphi|_U)^{-1}(A)A_0(\varphi|_U)^{-1}(A)$$

Il suffit alors de poser  $\psi = (\varphi|_U)^{-1}$  (qui est bien une application de classe  $\mathcal{C}^1$ ) pour avoir le résultat demandé.  $\square$

**Lemme 3** (Morse). Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^3$  (où  $U$  désigne un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  contenant l'origine). On suppose :

- $df_0 = 0$ .
- La matrice symétrique  $\text{Hess}(f)_0$  est inversible.
- La signature de  $\text{Hess}(f)_0$  est  $(p, n - p)$ .

Alors il existe un difféomorphisme  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$  de classe  $\mathcal{C}^1$  entre deux voisinage de l'origine de  $\mathbb{R}^n$   $V \subseteq U$  et  $W$  tel que  $\phi(0) = 0$  et

$$\forall x \in U, f(x) - f(0) = \sum_{k=1}^p \phi_k^2(x) - \sum_{k=p+1}^n \phi_k^2(x)$$

*Démonstration.* On écrit la formule de Taylor à l'ordre 1 avec reste intégral au voisinage de 0, qui donne :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + df_0(x) + \int_0^1 (1-t) d^2(1-t) f_{tx}(x, x) dt \\ \Leftrightarrow f(x) - f(0) &= {}^t x Q(x) x \end{aligned} \quad (*)$$

où  $Q(x)$  est la matrice symétrique définie par  $Q(x) = \int_0^1 (1-t) \text{Hess} f_{tx} dt$  (qui est une application  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  car  $f$  est  $\mathcal{C}^3$  sur  $U$ ).

Par hypothèse,  $Q(0) = \frac{\text{Hess}(f)_0}{2}$  est une matrice symétrique inversible, donc en vertu du Lemme 2, il existe un voisinage  $V_1$  de  $Q(0)$  dans  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et une application  $\psi : V_1 \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$  de classe  $\mathcal{C}^1$  tels que :

$$\forall A \in V_1, Q(0) = \psi(A) Q(0) \psi(A)$$

Mais, l'application  $x \rightarrow Q(x)$  est continue sur  $U$  (puisque  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^3$  sur  $U$ ), donc il existe  $V_2$  voisinage de 0 dans  $U$  tel que  $\forall x \in V_2, Q(x) \in V_1$ . On peut donc définir l'application  $M = \psi \circ Q|_{V_2}$ , qui nous permet d'écrire

$$\forall x \in V_2, Q(x) = {}^t M(x) Q(0) M(x) \quad (**)$$

Or,  $Q(0)$  est de signature  $(p, n - p)$ , donc d'après la loi d'inertie de Sylvester, il existe  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  telle que

$$Q(0) = {}^t P \underbrace{\begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_{n-p} \end{pmatrix}}_{=D} P \quad (***)$$

Finalement en combinant (\*) avec (\*\*) et (\*\*\*), cela donne

$$\begin{aligned} \forall x \in V_2, f(x) - f(0) &= {}^t (PM(x)x) D (PM(x)x) \\ \Leftrightarrow \varphi(x) = PM(x)x &\quad \forall x \in V_2, f(x) - f(0) = {}^t \varphi(x) D \varphi(x) \end{aligned}$$

ce qui est bien l'expression voulue.

Il reste à montrer que  $\varphi$  définit bien un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^1$  entre deux voisinages de l'origine. Notons déjà que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  car  $M$  l'est. Calculons la différentielle en 0 de  $\varphi$ . Soit

$h \in V_2$ ;

$$\begin{aligned}\varphi(h) - \varphi(0) &= PM(h)h \\ &= P(M(0) + dM_0(h) + o(\|h\|))h \\ &= PM(0)h + o(\|h\|)\end{aligned}$$

d'où  $d\varphi_0(h) = PM(0)h$ . Or,  $PM(0)$  est inversible, donc en particulier,  $d\varphi_0(h)$  l'est aussi. On peut appliquer le théorème d'inversion locale à  $\varphi$ , qui donne l'existence de deux ouverts  $V$  et  $W$  contenant l'origine (car  $\varphi(0) = 0$ ) tel que  $\phi = \varphi|_V$  soit un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $V$  sur  $W$ .  $\square$

**Application 4.** Soit  $S$  la surface d'équation  $z = f(x, y)$  où  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^3$  au voisinage de l'origine. On suppose la forme quadratique  $d^2f_0$  non dégénérée. Alors, en notant  $P$  le plan tangent à  $S$  en  $0$  :

- (i) Si  $d^2f_0$  est de signature  $(2, 0)$ , alors  $S$  est au-dessus de  $P$  au voisinage de  $0$ .
- (ii) Si  $d^2f_0$  est de signature  $(0, 2)$ , alors  $S$  est en-dessous de  $P$  au voisinage de  $0$ .
- (iii) Si  $d^2f_0$  est de signature  $(1, 1)$ , alors  $S$  traverse  $P$  selon une courbe admettant un point double en  $(0, f(0))$ .

*Démonstration.* Une équation cartésienne de  $P$  est donnée par

$$z - 0 = f(0) + df_0(x, y)$$

La différence d'altitude entre la surface  $S$  et le plan tangent  $P$  au point  $h \in \mathbb{R}^2$  est donc donnée par

$$\delta(h) = f(h) - (f(0) + df_0(h))$$

et le Lemme 3 permet d'écrire

$$\delta(h) = \alpha\phi_1(h)^2 + \beta\phi_2(h)^2$$

où  $(\alpha, \beta)$  désigne la signature de  $d^2f_0$  et  $\phi = (\phi_1, \phi_2)$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme entre deux voisinages de l'origine dans  $\mathbb{R}^2$ . En particulier,  $\phi_1$  et  $\phi_2$  ne s'annulent simultanément qu'en  $0$ .

- (i) Si  $d^2f_a$  est de signature  $(2, 0)$ , on a  $\delta(h) > 0$  pour  $h$  voisin de  $0$  et  $h \neq 0$ .
- (ii) Si  $d^2f_a$  est de signature  $(0, 2)$ , on a  $\delta(h) < 0$  pour  $h$  voisin de  $0$  et  $h \neq 0$ .
- (iii) Si  $d^2f_a$  est de signature  $(1, 1)$ , on a  $\delta(h) = \phi_1(h)^2 - \phi_2(h)^2$  et  $S$  traverse  $P$  selon une courbe admettant un point double en  $(0, f(0))$ .

$\square$

# Bibliographie

**Petit guide de calcul différentiel**

**[ROU]**

François ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel. à l'usage de la licence et de l'agrégation.* 4<sup>e</sup> éd. Cassini, 27 fév. 2015.

<https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/94-petit-guide-de-calcul-differentiel-4e-ed.html>.