Méthode de Newton

On démontre ici la méthode de Newton qui permet de trouver numériquement une approximation précise d'un zéro d'une fonction réelle d'une variable réelle.

Théorème 1 (Méthode de Newton)**.** Soit $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ strictement croissante sur $[c,d]$. On considère la fonction **[ROU]** p. 152

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [c,d] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{array}$$

(qui est bien définie car $f' > 0$). Alors :

(i) $\exists! a \in [c,d]$ tel que $f(a) = 0$.

(ii) $\exists \alpha > 0$ tel que $I = [a-\alpha, a+\alpha]$ est stable par φ.

(iii) La suite (x_n) des itérés (définie par récurrence par $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ pour tout $n \geq 0$) converge quadratiquement vers a pour tout $x_0 \in I$.

Démonstration. Soit $x \in [c,d]$. Comme $f(a) = 0$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \varphi(x) - a &= x - a - \frac{f(x) - f(a)}{f'(x)} \\ &= \frac{f(a) - f(x) - (a-x)f'(x)}{f'(x)} \end{aligned}$$

Or, la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 donne l'existence d'un $z \in]a, x[$ tel que

$$\begin{aligned} & f(a) = f(x) + f'(x)(a-x) + \frac{1}{2} f''(z)(a-x)^2 \\ \iff & f(a) - f(x) - f'(x)(a-x) = \frac{1}{2} f''(z)(a-x)^2 \end{aligned}$$

D'où :

$$\varphi(x) - a = \frac{f''(z)}{2f'(x)}(x-a)^2 \tag{$*$}$$

Soit $C = \frac{\max_{x \in [c,d]} |f''(x)|}{2 \min_{x \in [c,d]} |f'(x)|}$. Par $(*)$, on a :

$$\forall x \in [c,d], \ |\varphi(x) - a| \leq C|x-a|^2$$

Soit maintenant $\alpha > 0$ suffisamment petit pour que $C\alpha < 1$ et que $I = [a-\alpha, a+\alpha] \subseteq [c,d]$. Alors :

$$x \in I \implies |\varphi(x) - a| \leq C\alpha^2 < \alpha$$

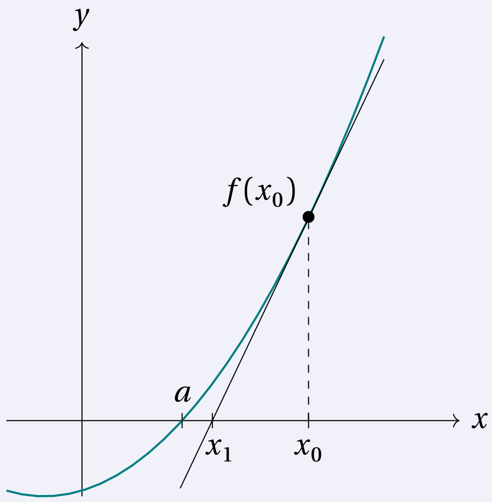
(la première inégalité se voit en faisant un dessin, et la seconde vient du fait que $C\alpha < 1$). D'où

$\varphi(I) \subseteq I$. Et si $x_0 \in I$, on a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in I$ et

$$\begin{aligned}|x_{n+1} - a| &= |\varphi(x_n) - a| \\ &\leq C|x_n - a|^2\end{aligned}$$

D'où $c|x_n - a| \leq (C|x_0 - a|)^{2^n} \leq (C\alpha)^{2^n}$ où $C\alpha < 1$. On a donc bien convergence quadratique de la suite (x_n) vers le réel a. □

Remarque 2. On suppose que l'on connaisse une approximation grossière du point que l'on nomme x_0. **[DEM]** p. 100



L'idée de la méthode est de remplacer la courbe représentative de f par sa tangente au point x_0 :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

L'abscisse x_1 du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses est donnée par

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

d'où le fait d'itérer la fonction $\varphi : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Corollaire 3. En reprenant les hypothèses et notations du théorème précédent, et en supposant de plus f strictement convexe sur $[c, d]$, le résultat du théorème est vrai sur $I = [a, d]$. De plus : **[ROU]** p. 152

(i) (x_n) est strictement décroissante (ou constante).

(ii) $x_{n+1} - a \sim \frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n - a)^2$ pour $x_0 > a$.

Démonstration. La dérivée f' est strictement croissante (car f est strictement convexe) sur $]c, d[$. Ainsi, soit $x \in [a, d]$. Si $x = a$, on a $\varphi(x) = x$, et la suite (x_n) est alors constante. Supposons maintenant $x > a$. On a :

$$\varphi(x) = x - \frac{\overbrace{f(x)}^{>0}}{\underbrace{f'(x)}_{>0}} < x$$

Et par $(*)$ (de la démonstration précédente), $\exists z \in]a, x[$:

$$\varphi(x) - a = \frac{f''(z)}{2f'(z)}(x-a)^2 > 0 \iff \varphi(x) < a$$

Ainsi, $I = [a, d]$ est stable par φ et pour $x_0 \in]a, d]$, on a $x_n \in]a, d]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la suite (x_n) est strictement décroissante. La suite (x_n) admet donc une limite ℓ vérifiant $\varphi(\ell) = \ell \iff f(\ell) = 0$ ie. $\ell = a$ par unicité. Comme dans le théorème précédent, la convergence est quadratique :

$$0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2$$

Enfin, si $x_0 \in]a, d]$, on a comme dans $(*)$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n > a \text{ et } \frac{x_{n+1} - a}{(x_n - a)^2} = \frac{f''(z_n)}{f'(z)}$$

(en faisant la même démarche que pour $(*)$ on obtient $z_n \in]a, x_n[$). On fait tendre n vers l'infini et la fraction de droite tend vers $\frac{f''(a)}{f'(a)}$; d'où le résultat. □

Remarque 4. L'ajout de l'hypothèse de convexité à la méthode de Newton, nous permet de nous affranchir de l'intervalle I tout en gardant la même vitesse de convergence.

Bibliographie

Analyse numérique et équations différentielles **[DEM]**

Jean-Pierre Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles.* 4e éd. EDP Sciences, 11 mai 2016.
http://www.grenoble-sciences.fr/pap-ebook/demailly/.

Petit guide de calcul différentiel **[ROU]**

François Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel. à l'usage de la licence et de l'agrégation.* 4e éd. Cassini, 27 fév. 2015.
https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/94-petit-guide-de-calcul-differentiel-4e-ed.html.