Projection sur un convexe fermé

On montre le théorème de projection sur un convexe fermé dans un espace de Hilbert réel en utilisant les suites de Cauchy et des propriétés du produit scalaire.

Soit H un espace de Hilbert réel de norme $\|.\|$ et dont on note $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire associé.

Lemme 1 (Identité du parallélogramme)**.** Soient $x, y \in H$. Alors :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

[LI] p. 32

Démonstration. D'une part,

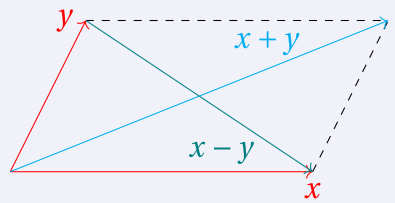
$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$$

D'autre part,

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle$$

En additionnant les deux lignes, on obtient bien l'égalité voulue. □

Remarque 2. L'interprétation géométrique de cette égalité est que dans le parallélogramme formé par les vecteurs x et y, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés.



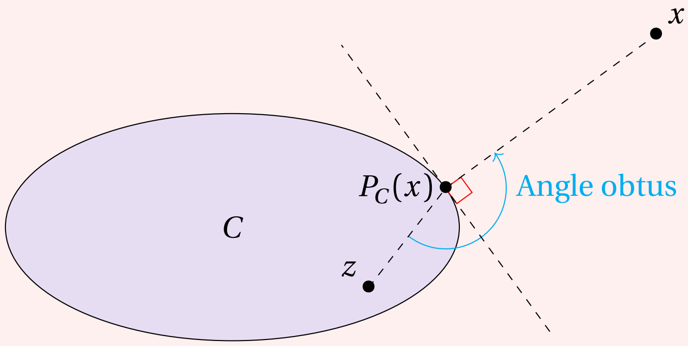
Théorème 3 (Projection sur un convexe fermé)**.** Soit $C \subseteq H$ un convexe fermé non-vide. Alors :

$$\forall x \in H, \exists! y \in C \text{ tel que } d(x, C) = \inf_{z \in C} \|x - z\| = d(x, y)$$

[GOU20] p. 427

On peut donc noter $y = P_C(x)$, le **projeté orthogonal de x sur C**. Il s'agit de l'unique point de C vérifiant

$$\forall z \in C, \langle x - P_C(x), z - P_C(x) \rangle \leq 0 \qquad (*)$$



Démonstration. Soit $x \in H$. Posons $\delta = d(x, C)$. Par la caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe (y_n) une suite de C telle que $\|x - y_n\| \longrightarrow \delta$. Montrons que (y_n) est une suite de Cauchy. On applique le Lemme 1 :

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, \|(x - y_p) + (x - y_q)\|^2 + \|y_p - y_q\|^2 = 2(\|x - y_p\|^2 + \|x - y_q\|^2) \qquad (**)$$

Or, C est convexe. Donc $\forall p, q \in \mathbb{N}$, $\frac{y_p + y_q}{2} \in C$. Par définition,

$$\begin{aligned} & \left\| x - \frac{y_p + y_q}{2} \right\| \geq \delta \\ \iff & \frac{1}{2} \|(x - y_p) + (x - y_q)\| \geq \delta \\ \iff & \|(x - y_p) + (x - y_q)\|^2 \geq 4\delta^2 \end{aligned}$$

Par $(**)$, quand $p, q \longrightarrow +\infty$:

$$\|y_p - y_q\| \leq 2((\underbrace{\|x - y_p\|^2}_{\longrightarrow \delta^2} - \delta^2) + (\underbrace{\|x - y_q\|^2}_{\longrightarrow \delta^2} - \delta^2)) \longrightarrow 0$$

Ainsi (y_n) est une suite de Cauchy de H qui est complet, donc (y_n) converge vers $y \in H$. Mais, C est fermé et (y_n) est une suite de C, donc $y \in C$.

Montrons maintenant que y est unique. Soit $z \in C$ tel que $\delta = d(x, C)$. On définit la suite (z_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_n = \begin{cases} y & \text{si } n \text{ est pair} \\ z & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Cette suite vérifie $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|x - y_n\| = \delta$ donc en particulier $\|x - y_n\| \longrightarrow \delta$, et on peut tout-à-fait refaire le raisonnement précédent pour montrer que (z_n) converge (vers $y = z$, donc). Ainsi, on a bien existence et unicité du projeté.

Soit $y \in C$ vérifiant $(*)$. Montrons que $y = P_C(x)$. $\forall z \in C$,

$$\begin{aligned} \|z - x\|^2 &= \|(z - y) - (x - y)\|^2 \\ &= \|z - y\|^2 + \|x - y\|^2 - 2\langle z - y, x - y \rangle \\ &\geq \|z - y\|^2 + \|x - y\|^2 \\ &\geq \|x - y\|^2 \end{aligned}$$

ie. $\|z - x\| \geq \|x - y\|$. De plus, $y \in C$, donc $d(y, C) = d(x, C)$. D'où $y = P_C(x)$.

Montrons maintenant que $P_C(x)$ vérifie bien $(*)$. Et $\forall z \in C$, on a

$$\|x - z\|^2 \geq \|x - P_C(x)\|^2$$

Or, en développant :

$$
\begin{aligned}
\|x-z\|^2 &= \|(x-P_C(x))-(z-P_C(x))\|^2 \\
&= \|x-P_C(x)\|^2+\|z-P_C(x)\|^2-2\langle x-P_C(x), z-P_C(x)\rangle \\
&\geq \|x-P_C(x)\|^2
\end{aligned}
$$

D'où,

$$
\|z-P_C(x)\|^2-2\langle x-P_C(x), z-P_C(x)\rangle \geq 0 \qquad (***)
$$

Soit maintenant $z_0 \in C$. On va appliquer $(***)$ à $z=\lambda z_0+(1-\lambda)z_0 \in C$ pour $\lambda \in]0,1]$:

$$
\begin{aligned}
&\lambda^2\|z_0+P_C(x)\|^2-2\lambda\langle x-P_C(x), z_0-P_C(x)\rangle \geq 0 \\
\implies &\lambda\|z_0+P_C(x)\|^2-2\langle x-P_C(x), z_0-P_C(x)\rangle \geq 0 \\
\overset{\lambda\longrightarrow 0}{\implies} &-2\langle x-P_C(x), z_0-P_C(x)\rangle \geq 0
\end{aligned}
$$

ce que l'on voulait. □

Remarque 4. $(*)$ traduit le fait géométrique que l'angle du vecteur $\overrightarrow{P_C(x)x}$ avec $\overrightarrow{P_C(x)z}$ est obtus pour tout $z \in C$. En effet, en notant cet angle θ, on a pour $z \in C$:

$$
\langle x-P_C(x), z-P_C(x)\rangle = \|x-P_C(x)\|\,\|z-P_C(x)\|\cos(\theta)
$$

et si θ est obtus, on a bien $\cos(\theta) \leq 0$.

Corollaire 5. Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H. Alors $F \oplus F^\perp = H$.

Démonstration. Si $x \in F \cap F^\perp$, alors $\|x\| = \langle x, x\rangle = 0$, et donc $x=0$. Montrons maintenant que $F+F^\perp = H$. Soit $x \in H$. Comme F est un convexe fermé de H (en tant que sous-espace vectoriel fermé), on peut appliquer le Théorème 3. Ainsi, il existe un unique $P_F(x) \in F$ tel que $d(x,F) = d(x, P_F(x))$ et

$$
\forall z \in F,\ \langle x-P_F(x), z-P_F(x)\rangle \leq 0 \qquad (*)
$$

Soit $z_0 \in F$. on peut appliquer $(*)$ à $z=z_0$:

$$
\langle x-P_F(x), z_0-P_F(x)\rangle \leq 0
$$

On va également appliquer $(*)$ à $z=-z_0+2P_F(x) \in F$:

$$
\langle x-P_F(x), -z_0+P_F(x)\rangle \leq 0 \iff \langle x-P_F(x), z_0-P_F(x)\rangle \geq 0
$$

Ce qui montre que l'inégalité de $(*)$ est en fait une égalité. On en tire :

$$
\forall z \in F,\ \langle x-P_F(x), z\rangle = \langle x-P_F(x), z-P_F(x)\rangle - \langle x-P_F(x), 0-P_F(x)\rangle = 0
$$

donc $x - P_F(x) \in F^{\perp}$. En conclusion, on a :

$$x = \underbrace{P_F(x)}_{\in F} + \underbrace{x - P_F(x)}_{\in F^{\perp}} \in F + F^{\perp}$$

et on a donc bien la somme directe $H = F \oplus F^{\perp}$. □

Bibliographie

Les maths en tête [GOU20]

Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Analyse.* 3^{e} éd. Ellipses, 21 avr. 2020. https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html.

Cours d'analyse fonctionnelle [LI]

Daniel Li. *Cours d'analyse fonctionnelle. avec 200 exercices corrigés.* Ellipses, 3 déc. 2013. https://www.editions-ellipses.fr/accueil/6558-cours-danalyse-fonctionnelle-avec-200-exercices-corriges-9782729883058.html.