Sous-groupes distingués et table des caractères

Dans ce développement, on montre que tout sous-groupe distingué d'un groupe fini s'écrit comme intersection de noyaux de caractères irréductibles. On utilise ensuite ce résultat pour donner un critère de simplicité.

Soit G un groupe fini.

[I-P] p. 66

Notation 1. — On note $\rho_1, \dots, \rho_r$ les représentations irréductibles de G. On suppose que ρ_1 est la représentation triviale.
— On note $\chi_1, \dots, \chi_r$ les caractères respectifs de $\rho_1, \dots, \rho_r$.

Théorème 2. Les sous-groupes distingués de G sont exactement les

$$\bigcap_{i \in I} \operatorname{Ker}(\rho_i) \text{ où } I \in \mathscr{P}(\llbracket 1, r \rrbracket)$$

Démonstration. Pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, le noyau de ρ_i est clairement distingué et donc toute intersection de noyaux de représentations irréductibles l'est aussi. Montrons que ce sont en fait les seuls sous-groupes distingués de G. Soit $N \lhd G$. On note $\rho : G/N \to \mathrm{GL}(V)$ la représentation régulière de G/N, de degré $[G:N]$. On pose $\widetilde{\rho} : g \mapsto \rho(\pi_N(g))$ (où $\pi_N : G \to G/N$ désigne la projection canonique sur le quotient, qui est un morphisme de groupes car N est distingué). On a alors :

$$\forall g, h \in G, \widetilde{\rho}(g) \in \mathrm{GL}(V) \text{ et } \widetilde{\rho}(gh) = \widetilde{\rho}(g)\widetilde{\rho}(h)$$

donc $\widetilde{\rho}$ est une représentation de G. De plus, comme ρ est injective, on a

$$\operatorname{Ker}(\widetilde{\rho}) = \{g \in G \mid \rho(\pi_N(g)) = \mathrm{id}_V\} = \{g \in G \mid \pi_N(g) = e_{G/N}\} = N$$

Comme $\widetilde{\rho}$ est une représentation de G, on peut la décomposer en somme directe de représentations irréductibles de G (par le théorème de Maschke) :

$$\widetilde{\rho} = \bigoplus_{i \in I} \rho_i \text{ où } I \in \mathscr{P}(\llbracket 1, r \rrbracket) \text{ et } \forall i \in I, \rho_i : G \to \mathrm{GL}(W_i)$$

Soit $g \in G$. Dans une base adaptée à la décomposition $V = \bigoplus_{i \in I} W_i$, $\widetilde{\rho}(g)$ s'écrit comme une matrice diagonale par blocs (où chaque bloc correspond à une sous-représentation irréductible). Ainsi,

$$g \in \operatorname{Ker}(\widetilde{\rho}) \iff \forall i \in I, g \in \operatorname{Ker}(\rho_i)$$

d'où $N = \operatorname{Ker}(\widetilde{\rho}) = \bigcap_{i \in I} \operatorname{Ker}(\rho_i)$. □

Corollaire 3. G est simple si et seulement si $\forall i \neq 1, \forall g \neq e_G, \chi_i(g) \neq \chi_i(e_G)$.

Démonstration. Sens direct : Supposons G simple. Pour $i \neq 1$, $\mathrm{Ker}(\chi_i) = \mathrm{Ker}(\rho_i) \lhd G$, donc

$$\mathrm{Ker}(\chi_i) = G \text{ ou } \mathrm{Ker}(\chi_i) = \{e_G\}$$

Supposons par l'absurde que que $\mathrm{Ker}(\chi_i) = G$ et notons n_i le degré de ρ_i de sorte que $\chi_i(g) = \chi_i(e_G) = n_i$ pour tout $g \in G$. En particulier,

$$\langle \chi_1, \chi_i \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_1(g)} \chi_i(g) = n_i$$

Mais, χ_1 et χ_i sont orthogonaux, donc $\langle \chi_1, \chi_i \rangle = 0$: absurde. D'où $\mathrm{Ker}(\chi_i) = \{e_G\}$. Donc $\forall g \neq e_G$, $\chi_i(g) \neq \chi_i(e_G)$.

Réciproque : Supposons que $\forall i \neq 1$, $\forall g \neq e_G$, $\chi_i(g) \neq \chi_i(e_G)$. Alors $\forall i \neq 1$, $\mathrm{Ker}(\chi_i) = \{e_G\}$. De plus, comme $\mathrm{Ker}(\chi_1) = G$, toute intersection de ces sous-groupes est triviale. Ainsi, G est simple par le Théorème 2. $\square$

Bibliographie

L'oral à l'agrégation de mathématiques **[I-P]**

Lucas Isenmann et Timothée Pecatte. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements*. 2e éd. Ellipses, 26 mars 2024.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html.