

## Suite de polygones

Il s'agit ici d'étudier une suite de polygones à l'aide de déterminants classiques, et de montrer qu'elle converge vers l'isobarycentre du polygone de départ.

**Lemme 1** (Déterminant circulant). Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ . On pose  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ . Alors

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} P(\omega^j)$$

où  $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ .

[GOU21]  
p. 153

*Démonstration.* On définit

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ et } \Omega = (\omega^{(i-1)(j-1)})_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

Pour  $i \geq 2$ , la  $i$ -ième ligne de  $A$  est

$$(a_{n-i+1} \quad \dots \quad a_{n-1} \quad a_0 \quad \dots \quad a_{n-i-2})$$

Si on multiplie cette ligne par la  $j$ -ième colonne de  $\Omega$ , on obtient le coefficient

$$\begin{aligned} & a_{n-i+1} + a_{n-i+2}\omega^{j-1} + \dots + a_0\omega^{(j-1)(i-1)} + a_1\omega^{(j-1)i} + \dots + a_{n-i-2}\omega^{(j-1)(n-1)} \\ &= \omega^{(j-1)(i-1)}(a_0 + a_1\omega^{j-1} + \dots + a_{n-1}\omega^{(j-1)(n-1)}) \\ &= \omega^{(j-1)(i-1)}P(\omega^{j-1}) \end{aligned}$$

et c'est encore vrai pour  $i = 1$  puisque  $\omega^0 = 1$ . Donc la  $j$ -ième colonne de  $A\Omega$  est égale à la  $j$ -ième colonne de  $\Omega$  multipliée par  $P(\omega^{j-1})$ . Ceci entraîne que

$$\det(A) \det(\Omega) = \det(A\Omega) = P(1)P(\omega) \dots P(\omega^{n-1}) \det(\Omega)$$

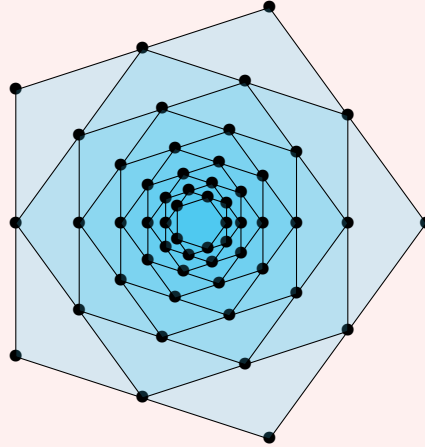
et le déterminant  $\det(\Omega)$  est non nul (en tant que déterminant de Vandermonde à paramètres deux-à-deux distincts). D'où :

$$\det(A) = P(1)P(\omega) \dots P(\omega^{n-1})$$

□

[I-P]  
p. 389

**Théorème 2** (Suite de polygones). Soit  $P_0$  un polygone dont les sommets sont  $\{z_{0,1}, \dots, z_{0,n}\}$ . On définit la suite de polygones  $(P_k)$  par récurrence en disant que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , les sommets de  $P_{k+1}$  sont les milieux des arêtes de  $P_k$ .



Alors la suite  $(P_k)$  converge vers l'isobarycentre de  $P_0$ .

*Démonstration.* On identifie  $P_k$  au vecteur colonne  $Z_k = \begin{pmatrix} z_{k,1} \\ \vdots \\ z_{k,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ . Il s'agit de montrer que la suite  $(Z_k)$  converge vers  $\begin{pmatrix} g \\ \vdots \\ g \end{pmatrix}$  où  $g$  désigne l'isobarycentre de  $P_0$ .

En utilisant la notation matricielle, la relation de récurrence s'écrit

$$\forall k \in \mathbb{N}, Z_{k+1} = \begin{pmatrix} \frac{z_{k,1} + z_{k,2}}{2} \\ \vdots \\ \frac{z_{k,n} + z_{k,1}}{2} \end{pmatrix} = AZ_k \text{ où } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Par une récurrence immédiate (c'est une suite géométrique), on a donc  $\forall k \in \mathbb{N}, Z_k = A^k Z_0$ . Il suffit donc de montrer que  $(A^k)$  converge dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  (muni d'une norme quelconque par équivalence des normes en dimension finie).

Pour cela, étudions les valeurs propres de  $A$  :

$$\chi_A = \det(A - XI_n) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{vmatrix}$$

avec  $a_0 = \frac{1}{2} - X$ ,  $a_1 = \frac{1}{2}$  et  $\forall i > 2, a_i = 0$ . On reconnaît le déterminant circulant du Lemme 1 et en

posant  $P(Y) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k Y^k$  et  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ , la formule du déterminant circulant nous donne :

$$\chi_A = \prod_{j=1}^n P(\omega^j) = \prod_{j=1}^n \left( \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{kj} \right) = \prod_{j=1}^n \left( \frac{1}{2} - X + \frac{1}{2} \omega^j \right) = \prod_{j=1}^n (\lambda_j - X)$$

où  $\lambda_j = \frac{1+\omega^j}{2}$ . Et comme  $\lambda_i = \lambda_j \iff i = j$ , le polynôme  $\chi_A$  est scindé à racines simples. Donc  $\exists Q \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  telle que  $A = QDQ^{-1}$  et  $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Or pour  $j \neq n$ ,

$$|\lambda_j| = \left| \frac{1+\omega^j}{2} \right| = \left| e^{\frac{ij\pi}{n}} \frac{e^{\frac{ij\pi}{n}} + e^{-\frac{ij\pi}{n}}}{2} \right| = \left| \cos\left(\frac{\pi j}{n}\right) \right| < 1$$

Ainsi,  $\lambda_j^k \rightarrow 0$  si  $j < n$ , donc la suite  $(A^k)$  converge dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  vers la matrice  $B = Q \text{Diag}(0, \dots, 0, 1) Q^{-1}$  par continuité de l'application  $M \mapsto QMQ^{-1}$ .

On pose donc  $X = BP_0$ , de sorte que la suite  $(Z_k)$  converge vers  $X$ . Par continuité de  $M \mapsto AM$ , la limite  $X$  vérifie forcément  $X = AX$  ie.  $X$  est vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre 1. Or

l'espace propre de  $A$  associé à la valeur propre 1 contient le vecteur  $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$  et est de dimension 1

(car  $\chi_A$  possède  $n$  racines distinctes), donc il est engendré par ce vecteur. Ainsi, il existe  $a \in \mathbb{C}$  tel

que  $X = \begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}$  ie.  $(Z_k)$  converge vers le point d'affixe  $a$ .

Enfin, on remarque que si  $g$  est l'isobarycentre de  $P_0$ , il est aussi égal à celui de  $P_k$  pour tout  $k$  (que l'on note  $g_k$ ) car pour tout  $k \geq 1$  :

$$g_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_{k,i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{z_{k-1,i} + z_{k-1,i+1}}{2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_{k-1,i} = g_{k-1}$$

(en considérant les indices  $i$  modulo  $n$ ). Or, la suite  $(Z_k)$  converge vers  $\begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}$ , et la fonction  $\varphi$  qui

à  $n$  points du plan associe son isobarycentre est continue. Donc,

$$g_k = \varphi(Z_k) \longrightarrow \varphi(a, \dots, a) = a$$

et comme pour tout  $k$ ,  $g_k = g$ , on a bien  $g = a$ . □

# Bibliographie

**Les maths en tête**

[GOU21]

---

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 13 juill. 2021.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html>.

**L'oral à l'agrégation de mathématiques**

[I-P]

---

Lucas ISENMANN et Timothée PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements*. 2<sup>e</sup> éd. Ellipses, 26 mars 2024.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html>.