# exp : $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est surjective

*Dans ce développement, on démontre que l'exponentielle de matrices est surjective en utilisant des théorèmes d'analyse.*

**Lemme 1.** Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Alors $M^{-1} \in \mathbb{C}[X]$ (ie. $M^{-1}$ est un polynôme en $M$). **[I-P]** p. 396

*Démonstration.* D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_M(M) = 0$. Or, en notant $\chi_M = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, on a $a_0 = (-1)^n \det(M)$, d'où

$$0 = M^n + \cdots + a_1 M + (-1)^n \det(M) I_n$$

En notant $Q = X^{n-1} + a_{n-1}X^{n-2} + \cdots + a_2 X + a_1$, on en déduit que $(-1)^{n+1}\det(M) I_n = Q(M)M$. D'où

$$M^{-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{\det(M)} Q(M) \in \mathbb{C}[M]$$

ce qu'il fallait démonter. □

**Lemme 2.** Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Alors, $\exp(M) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

*Démonstration.* $M$ et $-M$ commutent, donc

$$\exp(M)\exp(-M) = \exp(M - M) = I_n = \exp(-M)\exp(M)$$

Ainsi $\exp(M)$ est inversible, d'inverse $\exp(-M)$. □

**Lemme 3.** exp est différentiable en 0 et,

$$\mathrm{d}\exp_0 = I_n$$

*Démonstration.* Soit $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned} \exp(0 + H) - \exp(H) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H^k}{k!} \\ &= I_n + H + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{H^k}{k!} \end{aligned}$$

Soit $\|.\|$ une norme d'algèbre sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On a :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{H^k}{k!} \right\| &\leq \sum_{k=2}^{+\infty} \left\| \frac{H^k}{k!} \right\| \\ &\leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\|H\|^k}{k!} \end{aligned}$$

Donc,

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\|H\|^k}{k!} = o(\|H\|)$$

ce qui donne le résultat annoncé. □

**Théorème 4.** exp : $\mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est surjective.

*Démonstration.* Fixons $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ pour le reste de la démonstration. Comme $\mathbb{C}[C]$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, il est de dimension finie et est donc fermé. En particulier, $\exp(C) \in \mathbb{C}[C]$.

Posons $\mathbb{C}[C]^* = \mathbb{C}[C] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, et montrons que c'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

- $I_n \in \mathbb{C}[C]$ et $I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, donc $I_n \in \mathbb{C}[C]^*$.
- Soit $M \in \mathbb{C}[C]^*$. Comme $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $M^{-1}$ existe, est inversible, et, par le Lemme 1, $M^{-1} \in \mathbb{C}[C]$.
- Enfin, $\mathbb{C}[C]^*$ est clairement stable par multiplication.

Ainsi, $\mathbb{C}[C]^*$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, ce qui, combiné au Lemme 2, nous dit que exp : $\mathbb{C}[C] \to \mathbb{C}[C]^*$ est bien définie. Il s'agit de plus d'un morphisme de groupes. En effet, $\forall A, B \in \mathbb{C}[C]$, on a $AB = BA$, d'où $\exp(A)\exp(B) = \exp(A+B) = \exp(B)\exp(A)$.

Montrons que $\mathbb{C}[C]^*$ est un ouvert connexe de $\mathbb{C}[C]$. Notons qu'il s'agit bien d'un ouvert de $\mathbb{C}[C]$, car c'est l'intersection de $\mathbb{C}[C]$ avec $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ qui est ouvert dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Ensuite, soient $A, B \in \mathbb{C}[C]^*$. On pose

$$P = \det((1-X)A + XB)$$

$P$ ne s'annule ni en 0, ni en 1 par inversibilité de $A$ et $B$. $P$ a un nombre fini de racines car n'est pas nul : on peut trouver une fonction continue $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ qui évite ces racines. Donc,

$$\forall t \in [0,1], \gamma(t) \in \mathbb{C}[C]^*$$

donc $\mathbb{C}[C]^*$ est connexe par arcs, donc est connexe.

Il s'agit maintenant de montrer que $\exp(\mathbb{C}[C]^*)$ est un ouvert-fermé de $\mathbb{C}[C]^*$. Par le théorème d'inversion locale appliqué à exp : $\mathbb{C}[C] \to \mathbb{C}[C]$ (qui est bien $\mathscr{C}^1$ sur l'espace de Banach $\mathbb{C}[C]$ et, par le Lemme 3, $\det(\mathrm{d}\exp_0) \neq 0$) : il existe $U$ un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}(C)$ et un ouvert $V$ de $\mathbb{C}(C)$ contenant $\exp(0) = I_n$ tels que $\exp : U \to V$ soit un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$. Soit $A \in \mathbb{C}[C]$. Posons

$$f_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[C] & \to & \mathbb{C}[C] \\ M & \mapsto & \exp(A)^{-1}M \end{array}$$

Pour tout $B \in V$, $f(\exp(A)B) = \exp(A)^{-1}(\exp(A)B) = B \in V$, donc $\exp(A)V \subseteq f^{-1}(V)$. Soit $B \in f^{-1}(V)$, alors $f(B) \in V$. Or, $f(B) = \exp(A)^{-1}B$, donc $B = \exp(A)f(B) \in \exp(A)V$. On en déduit que $\exp(A)V = f^{-1}(V)$ et que $\exp(A)V$ est un ouvert par continuité de $f$. Comme $V$ contient $I_n$, $\exp(A)V$ est un voisinage de $\exp(A)$. Or, $\exp(A)V$ est inclus dans $\mathbb{C}[C]$ car pour tout $B \in V$, il existe $M \in \mathbb{C}[C]$ tel que $\exp(M) = B$. Ainsi,

$$\exp(A)B = \exp(A)\exp(M) = \exp(A+M) \in \exp(\mathbb{C}[C])$$

On en déduit que $\exp(\mathbb{C}[C])$ est un ouvert.

Montrons maintenant que

$$\mathbb{C}[C]^* \smallsetminus \exp(\mathbb{C}[C]) = \bigcup_{A \in (\mathbb{C}[C]^* \smallsetminus \exp(\mathbb{C}[C])} A \exp(\mathbb{C}[C]) \tag{$(*)$}$$

Soient $A \in \mathbb{C}[C]^* \smallsetminus \exp(\mathbb{C}[C])$ et $B \in \exp(\mathbb{C}[C])$. Alors $AB \in \mathbb{C}[C]^*$. Supposons par l'absurde que $AB \in \exp(\mathbb{C}[C])$. Il existe donc $M \in \exp(\mathbb{C}[C])$ tel que $AB = M$ et $A = MB^{-1}$. Comme $\exp(\mathbb{C}[C])$ est un groupe multiplicatif, alors $A \in \exp(\mathbb{C}[C])$ : absurde. On conclut que

$$\bigcup_{A \in \mathbb{C}[C]^* \smallsetminus \exp(\mathbb{C}[C])} A \exp(\mathbb{C}[C]) \subseteq \mathbb{C}[C]^* \smallsetminus \exp(\mathbb{C}[C])$$

Réciproquement, supposons que $M \in \mathbb{C}[C]^* \smallsetminus \exp(\mathbb{C}[C])$. Comme $I_n \in \exp(\mathbb{C}[C])$, alors $M \in M \exp(\mathbb{C}[C])$. On en déduit $(*)$, d'où la fermeture de $\exp(\mathbb{C}[M])$.

$\exp(\mathbb{C}[M])$ est un ouvert fermé non vide (car contient $I_n$) de $\mathbb{C}[M]^*$, alors $\exp(\mathbb{C}[M]) = \mathbb{C}[M]^*$. Pour conclure, si $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, alors comme $C \in \mathbb{C}[C]$, $C \in \mathbb{C}[C]^*$. Donc $C \in \exp(\mathbb{C}[C])$, et exp est bien surjective. □

**Application 5.** $\exp(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^2$, où $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^2$ désigne les carrés de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

*Démonstration.* Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors,

$$\exp(M) = \exp\left(\frac{M}{2}\right)^2$$

d'où $\exp(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^2$. Réciproquement, soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^2$. Posons $B = A^2$. D'après le Théorème 4,

$$\exists P \in \mathbb{C}[X] \text{ telle que } A = \exp(P(A))$$

Comme $A$ est une matrice réelle, alors en passant au conjugué, on obtient $A = \exp(\overline{P}(A))$. Ainsi,

$$B = A^2 = \exp((P + \overline{P})(A)) \in \exp(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$$

d'où $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^2 \subseteq \exp(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$. □

# Bibliographie

**L'oral à l'agrégation de mathématiques** **[I-P]**

Lucas Isenmann et Timothée Pecatte. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements.* 2e éd. Ellipses, 26 mars 2024.
`https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html`.