Théorème de Cauchy-Lipschitz local

En construisant un raisonnement autour du théorème du point fixe de Banach, on montre le théorème de Cauchy-Lipschitz, qui garantit l'existence d'une solution répondant à une condition initiale et l'unicité d'une solution maximale.

Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

[GOU20] p. 374

Théorème 1 (Cauchy-Lipschitz local)**.** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de E. Soit $F : I \times \Omega \to E$ une fonction continue et localement lipschitzienne en la seconde variable. Alors, pour tout $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = F(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{C}$$

admet une unique solution maximale.

[GOU20] p. 374

Démonstration. Nous commençons par montrer l'existence en 4 étapes.

— Localisation : Fixons un réel $r > 0$ tel que le produit $P = [t_0 - r, t_0 + r] \times \overline{B}(y_0, r)$ soit contenu dans $I \times \Omega$. F est continue sur P qui est compact, donc est bornée par M sur P.

— Mise sous forme intégrale : Comme une solution de $y' = F(t,y)$ est de ce fait $\mathscr{C}^1$, on a

$$y \in \mathscr{C}^1 \text{ vérifie } (C) \iff y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F(u, y(u))\,\mathrm{d}u \tag{$*$}$$

— Choix d'un domaine stable : Soit $\alpha \in]0, r[$. Introduisons l'intervalle $I_\alpha = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, l'espace $A_\alpha = \mathscr{C}(I_\alpha, \overline{B}(y_0, r))$, puis l'application

$$\Psi : \begin{array}{ll} A_\alpha & \to \mathscr{C}(I_\alpha, E) \\ \varphi & \mapsto \left(t \mapsto y_0 + \int_{t_0}^{t} F(u, \varphi(u))\,\mathrm{d}u\right) \end{array}$$

Le problème est ici de rendre A_α stable par Ψ. Pour tout $t \in I_\alpha$,

$$\begin{aligned} & \|F(t, \varphi(t))\| \leq M \\ \implies & \|\Psi(\varphi)(t) - y_0\| \leq M|t - t_0| \leq \alpha M \end{aligned}$$

Par suite, en choisissant $\alpha M < r$, le domaine A_α est stable par Ψ.

— Détermination d'un domaine de contraction : Ici, A_α est normé par la norme $\|.\|_\infty$, et on veut faire de Ψ une contraction stricte. Soient $\varphi, \phi \in A_\alpha$, par définition, pour tout $t \in I_\alpha$,

$$\begin{aligned} \|(\Psi(\varphi) - \Psi(\phi))(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} (F(u, \varphi(u)) - F(u, \phi(u)))\,\mathrm{d}u \right\| \\ &\leq k|t - t_0|\,\|\varphi - \phi\|_\infty \\ &\leq k\alpha \|\varphi - \phi\|_\infty \end{aligned}$$

où k désigne le rapport de lipschitziannité de F. On choisit désormais α tel que $k\alpha < 1$ et $\alpha M < r$.

— Conclusion : L'application Ψ est, par choix de α, une contraction stricte de $(A_\alpha, \|.\|_\infty)$ dans lui-même. Le fermé $\overline{B}(y_0, r)$ de l'espace de Banach de E est complet, par suite $(A_\alpha, \|.\|_\infty)$ l'est aussi.

Par le théorème du point fixe de Banach, Ψ possède donc un point fixe φ dans A_α. φ est alors de classe $\mathscr{C}^1$ et vérifie (C) par $(*)$.

Il reste maintenant à montrer l'unicité. On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (C). $\mathscr{S} \neq \emptyset$, donc peut définir J comme la réunion des intervalles de définition des solutions de (C).

Soient $\varphi, \phi \in \mathscr{S}$ (on note K et L leur intervalle de définition). Une récurrence sur n donne

$$\begin{aligned}
\forall t \in K \cap L, \forall n \in \mathbb{N}, \|\varphi(t) - \phi(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|F(u, \varphi(u)) - F(u, \phi(u))\| \,\mathrm{d}u \right| \\
&\leq \frac{|t - t_0|^n}{n!} k^n \sup_{t \in K \cap L} |\varphi(t) - \phi(t)| \\
&\longrightarrow 0
\end{aligned}$$

Donc φ et ϕ coïncident sur $K \cap L$.

Ainsi, on définit correctement l'application

$$\theta : \begin{array}{ccc} J & \to & E \\ t & \mapsto & \phi(t) \end{array}$$

(où $\phi \in S$ tel que t est dans son intervalle de définition). Si $t \in J$, il existe $\phi \in \mathscr{S}$ tel que t soit dans son intervalle de définition K. Comme ϕ et θ coïncident sur K, θ est dérivable sur K et

$$\forall t \in K, \theta'(t) = \phi'(t) = F(t, \phi(t)) = F(t, \theta(t))$$

Et comme $\theta(t_0) = y_0$, $\theta \in \mathscr{S}$ et prolonge toute solution. Donc θ est maximale et est bien unique. $\square$

Bibliographie

Les maths en tête **[GOU20]**

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse.* 3e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html.