

# Théorème de Fejér

Dans ce développement, on montre le théorème de Fejér, qui assure la convergence de la série de Fourier d'une fonction vers sa série de Fourier au sens de Cesàro.

**Notation 1.** Pour tout  $p \in [1, +\infty]$ , on note  $L_p^{2\pi}$  l'espace des fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $2\pi$ -périodiques et mesurables, telles que  $\|f\|_p < +\infty$ .

**Notation 2.** On note  $\forall N \in \mathbb{N}^*$  :

- $e_n : x \mapsto e^{inx}$ .
- $D_N : x \mapsto \sum_{n=-N}^N e_n$ , le noyau de Dirichlet.
- $K_N = \frac{D_0 + \dots + D_{N-1}}{N}$ , le noyau de Fejér.

**Notation 3.** On note également, pour toute fonction  $f \in L_1^{2\pi}$ .

- $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$ , le  $n$ -ième coefficient de Fourier de  $f$ .
- $S_N(f) : x \mapsto \sum_{n=-N}^N c_n(f) e_n$ , la somme partielle d'ordre  $N$  de la série de Fourier de  $f$ .
- $\sigma_N(f) : x \mapsto \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N S_n(f)(x)$ , la moyenne de Cesàro des sommes partielles de la série de Fourier de  $f$ .

**Lemme 4.** Soit  $N \in \mathbb{N}$ .

- (i)  $D_N$  est une fonction paire,  $2\pi$ -périodique, et de norme 1.
- (ii)

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, D_N(x) = \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

- (iii) Pour tout  $f \in L_1^{2\pi}$ ,  $S_N(f) = f * D_N$ .

[AMR08]  
p. 184

*Démonstration.* Soit  $N \in \mathbb{N}$ .

- (i) Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$D_N(-x) = \sum_{n=-N}^N e_n(-x) = \sum_{n=-N}^N e_{-n}(x) = \sum_{n=-N}^N e_n(x) = D_N(x)$$

Donc  $D_N$  est bien paire. Elle est  $2\pi$ -périodique car  $e_n$  l'est pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ . De plus,

$$1 = c_0(D_N) = \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx = \|D_N\|_1$$

(ii) Soit  $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ . On a :

$$\begin{aligned}
 D_n(x) &= e^{-iNx} \sum_{n=0}^{2N} e^{inx} \\
 &= e^{-iNx} \frac{e^{(2N+1)ix} - 1}{e^{ix} - 1} \\
 &= e^{-iNx} \frac{e^{(2N+1)i\frac{x}{2}} \left( e^{(2N+1)i\frac{x}{2}} - e^{-(2N+1)i\frac{x}{2}} \right)}{e^{i\frac{x}{2}} \left( e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}} \right)} \\
 &= \frac{2i \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2i \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
 &= \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}
 \end{aligned}$$

(iii) Soit  $f \in L_1^{2\pi}$ .

$$f * D_N(f) = \sum_{n=-N}^N f * e_n = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e_n = S_N(f)$$

□

**Lemme 5.** Soient  $N \in \mathbb{N}^*$  et  $f \in L_1^{2\pi}$ .

(i)  $K_N$  est une fonction positive et de norme 1.

(ii)

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, K_N(x) = \frac{1}{N} \left( \frac{\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right)^2$$

(iii)  $K_N = \sum_{n=-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e_n$ .

(iv)  $\sigma_N(f) = f * K_N$ .

*Démonstration.* Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . Nous allons user et abuser du Lemme 4.

(i) La positivité résulte directement du point suivant. De plus,

$$\|K_N\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_N(x) dx = 1$$

(ii) Soit  $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned}
 NK_N(x) &= \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} \left( \sum_{|n| \leq j} e_j \right) \\
 &= \sum_{|n| \leq N-1} e_n \left( \sum_{|n| \leq j \leq N-1} 1 \right) \\
 &= \sum_{|n| \leq N-1} (N - |n|) e_n \\
 &= \sum_{n=-N}^N (N - |n|) e_n
 \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
 NK_N &= \sum_{n=0}^{N-1} D_n \\
 &= \sum_{n=0}^N \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
 &= \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \operatorname{Im} \left( \sum_{n=0}^{N-1} e^{i(n + \frac{1}{2})x} \right) \\
 &= \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \operatorname{Im} \left( e^{\frac{ix}{2}} \frac{e^{iNx} - 1}{e^{ix} - 1} \right) \\
 &= \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \operatorname{Im} \left( e^{\frac{ix}{2}} \frac{e^{\frac{iNx}{2}} 2i \sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{e^{\frac{ix}{2}} 2i \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right) \\
 &= \frac{\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2} \operatorname{Im} \left( e^{\frac{iNx}{2}} \right) \\
 &= \frac{\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)^2}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2}
 \end{aligned}$$

(iv)

$$N\sigma_N(f) = \sum_{n=0}^{N-1} S_n(f) = \sum_{n=0}^{N-1} f * D_n = f * \left( \sum_{n=0}^{N-1} D_n \right)$$

Donc on a bien  $\sigma_N(f) = f * K_N$ .

□

**Théorème 6 (Fejér).** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $2\pi$ -périodique.

- (i) Si  $f$  est continue, alors  $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$  et  $(\sigma_N(f))$  converge uniformément vers  $f$ .
- (ii) Si  $f \in L_p^{2\pi}$  pour  $p \in [1, +\infty[$ , alors  $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$  et  $(\sigma_N(f))$  converge vers  $f$  pour  $\|\cdot\|_p$ .

*Démonstration.* (i) On suppose  $f$  continue.

- Sur l'intervalle compact  $[0, 2\pi]$ ,  $f$  est bornée et atteint ses bornes. En particulier,  $\|f\|_\infty$  est bien définie. De plus, si  $x \in \mathbb{R}$ , par le Lemme 5 on a :

$$\sigma_N(f)(x) = (f * K_N)(x)$$

Donc,

$$|\sigma_N(f)(x)| \leq \|f\|_\infty \underbrace{\|K_N\|_1}_{=1} = \|f\|_\infty$$

d'où  $\sigma_N(f)$  est bornée avec

$$\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

- Soit  $\delta \in ]0, \pi]$ . Posons

$$\omega(\delta) = \sup_{|u-v| \leq \delta} \{|f(u) - f(v)|\}$$

le module de continuité de  $f$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :

$$\begin{aligned} f(x) - \sigma_N(f)(x) &= f(x) - (f * K_N)(x) \\ &= f(x) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_N(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x-t)) K_N(t) dt \end{aligned} \quad (*)$$

d'où

$$\begin{aligned} |f(x) - \sigma_N(f)(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|t| \leq \delta} (f(x) - f(x-t)) K_N(t) dt \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} (f(x) - f(x-t)) K_N(t) dt \\ &\leq \frac{\omega(\delta)}{2\pi} \int_{|t| \leq \delta} K_N(t) dt + 2\|f\|_\infty \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} K_N(t) dt \\ &\leq \frac{\omega(\delta)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) dt + \frac{2\|f\|_\infty}{N \sin\left(\frac{\delta}{2}\right)^2} \\ &= \omega(\delta) + \frac{2\|f\|_\infty}{N \sin\left(\frac{\delta}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

Donc, on a :

$$\|f(x) - \sigma_N(f)(x)\|_\infty \leq \omega(\delta) + \frac{2\|f\|_\infty}{N \sin\left(\frac{\delta}{2}\right)^2} \quad (**)$$

On peut passer à la limite supérieure dans (\*\*\*) pour obtenir :

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} \|f(x) - \sigma_N(f)(x)\|_\infty \leq \omega(\delta)$$

Comme  $f$  est continue sur le compact  $[0, 2\pi]$ , elle y est uniformément continue par le

théorème de Heine :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y) \in [0, 2\pi]^2, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

On peut donc faire tendre  $\delta$  vers 0 pour obtenir  $\limsup_{N \rightarrow +\infty} \|f(x) - \sigma_N(f)(x)\|_\infty \leq 0$  ie.

$$\limsup_{N \rightarrow +\infty} \|f(x) - \sigma_N(f)(x)\|_\infty = 0$$

Comme,

$$0 \leq \liminf_{N \rightarrow +\infty} \|f(x) - \sigma_N(f)(x)\|_\infty \leq \limsup_{N \rightarrow +\infty} \|f(x) - \sigma_N(f)(x)\|_\infty = 0$$

On a bien,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|f(x) - \sigma_N(f)(x)\|_\infty = 0$$

(ii) — Par le Lemme 5, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\sigma_N(f)(x)|^p = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_N(t) dt \right|^p$$

On applique l'inégalité de Hölder à  $\frac{K_N}{2\pi}$  :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\sigma_N(f)(x)|^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|^p K_N(t) dt$$

Enfin, en intégrant par parties et en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned} \|\sigma_N(f)\|_p^p &\leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) (|f(x-t)|^p dx) dt \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) (|f(x)|^p dx) dt \\ &= \|K_N\|_1 \|f\|_p^p \\ &= \|f\|_p^p \end{aligned}$$

— Par (\*) :

$$\|\sigma_N(f) - f\|_p^p \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) (|f(x-t)|^p dx) dt$$

En posant  $g : t \mapsto \|f - \tau_t f\|_p^p$  (où  $\tau$  est l'opérateur de translation) :

$$\begin{aligned} \|\sigma_N(f) - f\|_p^p &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) g(-t) dt \\ &= (g * K_N)(0) \\ &= \sigma_N(g)(0) \end{aligned}$$

Comme  $g$  est continue et  $2\pi$ -périodique, on a par le point précédent

$$\sigma_N(g)(0) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} g(0) = 0$$

Donc, on a bien,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|\sigma_N(f) - f\|_p = 0$$

□

*Remarque 7.* Dans ce développement, il est courant de ne prouver que le premier point.

# Bibliographie

**Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels**

[AMR08]

Mohammed EL-AMRANI. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels. Niveau M1*. Ellipses, 28 août 2008.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3908-14232-analyse-de-fourier-dans-les-espaces-fonctionnels-niveau-m1-9782729839031.html>.