Théorème de Fejér

Dans ce développement, on montre le théorème de Fejér, qui assure la convergence de la série de Fourier d'une fonction vers sa série de Fourier au sens de Cesàro.

Notation 1. Pour tout $p \in [1,+\infty]$, on note $L_p^{2\pi}$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodiques et mesurables, telles que $\|f\|_p < +\infty$.

Notation 2. On note $\forall N \in \mathbb{N}^*$:

— $e_n : x \mapsto e^{inx}$.

— $D_N : x \mapsto \sum_{n=-N}^{N} e_n$, le noyau de Dirichlet.

— $K_N = \frac{D_0+\dots+D_{N-1}}{N}$, le noyau de Fejér.

Notation 3. On note également, pour toute fonction $f \in L_1^{2\pi}$.

— $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t$, le n-ième coefficient de Fourier de f.

— $S_N(f) : x \mapsto \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e_n$, la somme partielle d'ordre N de la série de Fourier de f.

— $\sigma_N(f) : x \mapsto \frac{1}{N-1}\sum_{n=0}^{N} S_n(f)(x)$, la moyenne de Cesàro des sommes partielles de la série de Fourier de f.

Lemme 4. Soit $N \in \mathbb{N}$. **[AMR08]** p. 184

(i) D_N est une fonction paire, 2π-périodique, et de norme 1.

(ii)
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z},\, D_N(x) = \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

(iii) Pour tout $f \in L_1^{2\pi}$, $S_N(f) = f * D_N$.

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}$.

(i) Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$D_N(-x) = \sum_{n=-N}^{N} e_n(-x) = \sum_{n=-N}^{N} e_{-n}(x) = \sum_{n=-N}^{N} e_n(x) = D_N(x)$$
Donc D_N est bien paire. Elle est 2π-périodique car e_n l'est pour tout $n \in \mathbb{Z}$. De plus,
$$1 = c_0(D_N) = \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\,\mathrm{d}x = \|D_N\|_1$$

(ii) Soit $x \in \mathbb{R} \smallsetminus 2\pi\mathbb{Z}$. On a :

$$\begin{aligned}
D_n(x) &= e^{-iNx} \sum_{n=0}^{2N} e^{inx} \\
&= e^{-iNx} \frac{e^{(2N+1)ix} - 1}{e^{ix} - 1} \\
&= e^{-iNx} \frac{e^{(2N+1)i\frac{x}{2}} \left(e^{(2N+1)i\frac{x}{2}} - e^{-(2N+1)i\frac{x}{2}} \right)}{e^{i\frac{x}{2}} \left(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}} \right)} \\
&= \frac{2i \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2i \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

(iii) Soit $f \in L_1^{2\pi}$.

$$f * D_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} f * e_n = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e_n = S_N(f)$$

□

Lemme 5. Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $f \in L_1^{2\pi}$.

(i) K_N est une fonction positive et de norme 1.

(ii)

$$\forall x \in \mathbb{R} \smallsetminus 2\pi\mathbb{Z}, K_N(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right)^2$$

(iii) $K_N = \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) e_n$.

(iv) $\sigma_N(f) = f * K_N$.

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Nous allons user et abuser du Lemme 4.

(i) La positivité résulte directement du point suivant. De plus,

$$\|K_N\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_N(x) \, \mathrm{d}x = 1$$

(ii) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
NK_N(x) &= \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{|n| \leq j} e_j \right) \\
&= \sum_{|n| \leq N-1} e_n \left(\sum_{|n| \leq j \leq N-1} 1 \right) \\
&= \sum_{|n| \leq N-1} (N - |n|) e_n \\
&= \sum_{n=-N}^{N} (N - |n|) e_n
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
NK_N &= \sum_{n=0}^{N-1} D_n \\
&= \sum_{n=0}^{N} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{i(n+\frac{1}{2})x} \right) \\
&= \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \operatorname{Im}\left(e^{\frac{ix}{2}} \frac{e^{iNx-1}}{e^{ix} - 1} \right) \\
&= \frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \operatorname{Im}\left(e^{\frac{ix}{2}} \frac{e^{\frac{iNx}{2}} 2i \sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{e^{\frac{ix}{2}} 2i \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2} \operatorname{Im}\left(e^{\frac{iNx}{2}} \right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)^2}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2}
\end{aligned}$$

(iv)

$$N\sigma_N(f) = \sum_{n=0}^{N-1} S_n(f) = \sum_{n=0}^{N-1} f * D_n = f * \left(\sum_{n=0}^{N-1} D_n \right)$$

Donc on a bien $\sigma_N(f) = f * K_N$.

□

Théorème 6 (Fejér)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique. **[AMR08]** p. 190

(i) Si f est continue, alors $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et $(\sigma_N(f))$ converge uniformément vers f.

(ii) Si $f \in L_p^{2\pi}$ pour $p \in [1, +\infty[$, alors $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$ et $(\sigma_N(f))$ converge vers f pour $\|.\|_p$.

Démonstration. (i) On suppose f continue.

— Sur l'intervalle compact $[0,2\pi]$, f est bornée et atteint ses bornes. En particulier, $\|f\|_\infty$ est bien définie. De plus, si $x \in \mathbb{R}$, par le Lemme 5 on a :

$$\sigma_N(f)(x) = (f * K_N)(x)$$

Donc,

$$|\sigma_N(f)(x)| \leq \|f\|_\infty \underbrace{\|K_N\|_1}_{=1} = \|f\|_\infty$$

d'où $\sigma_N(f)$ est bornée avec

$$\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

— Soit $\delta \in]0,\pi]$. Posons

$$\omega(\delta) = \sup_{|u-v|\leq\delta} \{|f(u) - f(v)|\}$$

le module de continuité de f. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) - \sigma_N(f)(x) &= f(x) - (f * K_N)(x) \\ &= f(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_N(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - f(x-t))K_N(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{*}$$

d'où

$$\begin{aligned} |f(x) - \sigma_N(f)(x)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leq\delta} (f(x) - f(x-t))K_N(t)\,\mathrm{d}t \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi} (f(x) - f(x-t))K_N(t)\,\mathrm{d}t \\ &\leq \frac{\omega(\delta)}{2\pi}\int_{|t|\leq\delta} K_N(t)\,\mathrm{d}t + 2\|f\|_\infty \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi} K_N(t)\,\mathrm{d}t \\ &\leq \frac{\omega(\delta)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\,\mathrm{d}t + \frac{2\|f\|_\infty}{N\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)^2} \\ &= \omega(\delta) + \frac{2\|f\|_\infty}{N\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

Donc, on a :

$$\|f(x) - \sigma_N(f)(x)\|_\infty \leq \omega(\delta) + \frac{2\|f\|_\infty}{N\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)^2} \tag{**}$$

On peut passer à la limite supérieure dans $(**)$ pour obtenir :

$$\limsup_{N\to+\infty} \|f(x) - \sigma_N(f)(x)\|_\infty \leq \omega(\delta)$$

Comme f est continue sur le compact $[0,2\pi]$, elle y est uniformément continue par le théorème de Heine :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y) \in [0, 2\pi]^2, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

On peut donc faire tendre δ vers 0 pour obtenir $\limsup_{N \to +\infty} \|f(x) - \sigma_N(f)(x)\|_\infty \leq 0$ ie.

$$\limsup_{N \to +\infty} \|f(x) - \sigma_N(f)(x)\|_\infty = 0$$

Comme,

$$0 \leq \liminf_{N \to +\infty} \|f(x) - \sigma_N(f)(x)\|_\infty \leq \limsup_{N \to +\infty} \|f(x) - \sigma_N(f)(x)\|_\infty = 0$$

On a bien,

$$\lim_{N \to +\infty} \|f(x) - \sigma_N(f)(x)\|_\infty = 0$$

(ii) — Par le Lemme 5, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\sigma_N(f)(x)|^p = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - t) K_N(t) \, \mathrm{d}t \right|^p$$

On applique l'inégalité de Hölder à $\frac{K_N}{2\pi}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\sigma_N(f)(x)|^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x - t)|^p K_N(t) \, \mathrm{d}t$$

Enfin, en intégrant par parties et en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli :

$$\begin{aligned}
\|\sigma_N(f)\|_p^p &\leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) \left(|f(x - t)|^p \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) \left(|f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t \\
&= \|K_N\|_1 \|f\|_p^p \\
&= \|f\|_p^p
\end{aligned}$$

— Par $(*)$:

$$\|\sigma_N(f) - f\|_p^p \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) \left(|f(x - t)|^p \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t$$

En posant $g : t \mapsto \|f - \tau_t f\|_p^p$ (où τ est l'opérateur de translation) :

$$\begin{aligned}
\|\sigma_N(f) - f\|_p^p &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_N(t) g(-t) \, \mathrm{d}t \\
&= (g * K_N)(0) \\
&= \sigma_N(g)(0)
\end{aligned}$$

Comme g est continue et 2π-périodique, on a par le point précédent

$$\sigma_N(g)(0) \longrightarrow_{\to +\infty} g(0) = 0$$

Donc, on a bien,

$$\lim_{N \to +\infty} \|\sigma_N(f) - f\|_p = 0$$

$\square$

Remarque 7. Dans ce développement, il est courant de ne prouver que le premier point.

Bibliographie

Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels **[AMR08]**

Mohammed El-Amrani. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels. Niveau M1*. Ellipses, 28 août 2008.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3908-14232-analyse-de-fourier-dans-les-espaces-fonctionnels-niveau-m1-9782729839031.html.