

Théorème de Weierstrass (par la convolution)

On montre le théorème de Weierstrass par la convolution (sans forcément développer toute la théorie derrière, ce qui peut être utile dans certaines leçons).

Notation 1. $\forall n \in \mathbb{N}$, on note :

$$a_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt \text{ et } p_n : t \mapsto \frac{(1-t^2)^n}{a_n} \mathbb{1}_{[-1,1]}(t)$$

[GOU20]
p. 304

Lemme 2. La suite (p_n) vérifie :

- (i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n \geq 0$.
- (ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}} p_n(t) dt = 1$.
- (iii) $\forall \alpha > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{|t| > \alpha} p_n(t) dt = 0$.

Autrement dit, (p_n) est une **approximation positive de l'identité**.

Démonstration. Notons tout d'abord que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 2 \int_0^1 (1-t^2)^n dt \geq 2 \int_0^1 t(1-t^2)^n dt = \left[-\frac{(1-t^2)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

- (i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n \geq 0$ car $a_n \geq 0$ et $(1-t^2)^n \geq 0$ pour tout $t \in [-1, 1]$.
- (ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}} p_n(t) dt = \frac{1}{a_n} \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt = 1$.
- (iii) Soit $\alpha > 0$.

— Si $\alpha < 1$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{|t| \geq \alpha} p_n(t) dt = \frac{2}{a_n} \int_{\alpha}^1 (1-t^2)^n dt \leq \frac{2}{a_n} (1-\alpha^2)^n \leq 2(n+1)(1-\alpha^2)^n$$

et comme $|1-\alpha^2| < 1$, on a $\int_{|t| \geq \alpha} p_n(t) dt \rightarrow 0$.

— Si $\alpha \geq 1$:

$$\int_{|t| \geq \alpha} p_n(t) dt = 0$$

□

Théorème 3 (Weierstrass). Toute fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$) est limite uniforme de fonctions polynômiales sur $[a, b]$.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ continue. Montrons que $(f * p_n)$ converge uniformément vers f . Soit $\epsilon > 0$. Par le théorème de Heine f est uniformément continue sur son support, donc l'est aussi sur \mathbb{R} entier :

$$\exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

De plus, f est bornée et atteint ses bornes (donc écrire $\|f\|_\infty$ a du sens). On peut appliquer le Lemme 2 point (iii) :

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, \int_{|t| \geq \eta} p_n(t) dt < \epsilon$$

Donc, toujours avec le Lemme 2, pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |f * p_n(x) - f(x)| &\stackrel{(ii)}{=} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x-t)p_n(t) dt - f(x) \int_{\mathbb{R}} p_n(t) dt \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} (f(x-t) - f(x))p_n(t) dt \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |(f(x-t) - f(x))p_n(t)| dt \\ &\stackrel{(i)}{=} \int_{\mathbb{R}} |f(x-t) - f(x)| p_n(t) dt \\ &= \int_{|t| \geq \eta} |f(x-t) - f(x)| p_n(t) dt + \int_{-\eta}^{\eta} |f(x-t) - f(x)| p_n(t) dt \\ &= 2\|f\|_\infty \epsilon + \epsilon \int_{-\eta}^{\eta} p_n(t) dt \\ &\stackrel{(i)}{\leq} 2\|f\|_\infty \epsilon + \epsilon \int_{\mathbb{R}} p_n(t) dt \\ &= (2\|f\|_\infty + 1)\epsilon \end{aligned}$$

d'où la convergence uniforme. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$. Supposons que f est à support dans $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et montrons que pour tout $f * p_n$ est une fonction polynômiale.

$$\forall x \in I, (f * p_n)(x) = (p_n * f)(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} p_n(x-t)f(t) dt \quad (*)$$

Notons que $\forall x, t \in I, |x-t| \leq 1$, donc

$$p_n(x-t) = \frac{(1-(x-t)^2)^n}{a_n} \stackrel{\text{développement}}{=} \sum_{k=0}^{2n} q_k(t)x^k$$

où $\forall k \in [0, 2n]$, q_k est une fonction polynômiale. En remplaçant dans (*), on obtient :

$$\forall x \in I, (f * p_n)(x) = \sum_{k=0}^{2n} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} q_k(t)f(t) dt \right) x^k$$

qui est bien une fonction polynômiale sur I .

Soient maintenant $[a, b]$ un intervalle fermé de \mathbb{R} et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On considère $[c, d]$ un intervalle plus grand avec $c < a$ et $b < d$ et on prolonge f par :

- Une fonction affine sur $[c, a]$ qui vaut 0 en c et $f(a)$ en a .
- Une fonction affine sur $[b, d]$ qui vaut 0 en d et $f(b)$ en b .

Et on peut encore prolonger cette fonction sur \mathbb{R} tout entier en une fonction \tilde{f} telle que $\tilde{f} = 0$ pour tout $x \notin [c, d]$. On a donc $\tilde{f} \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$. Nous allons maintenant avoir besoin du changement de

variable suivant :

$$\varphi: \begin{array}{l} I \rightarrow [c, d] \\ x \mapsto (d-c)x + \frac{c+d}{2} \end{array}$$

Comme $\tilde{f} \circ \varphi$ est continue, à support dans I , on peut maintenant affirmer que $\tilde{f} \circ \varphi$ est limite uniforme d'une suite de polynômes (ρ_n) . Donc \tilde{f} est limite uniforme de la suite $(\rho_n \circ \varphi^{-1})$ où $\forall n \in \mathbb{N}$, $\rho_n \circ \varphi^{-1}$ est bien une fonction polynômiale car φ (donc φ^{-1} aussi) est affine. A fortiori, $f = \tilde{f}|_{[a,b]}$ est aussi limite de fonctions polynômiales sur $[a, b]$. \square

Bibliographie

Les maths en tête

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3^e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.