Théorème de Weierstrass (par les probabilités)

On montre le théorème de Weierstrass en faisant un raisonnement sur des variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli.

[G-K] p. 195

Théorème 1 (Bernstein)**.** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. On note

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, B_n(f) : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

le n-ième polynôme de Bernstein associé à f. Alors le suite de fonctions $(B_n(f))$ converge uniformément vers f.

Démonstration. Soit $x \in]0,1[$. On se place sur un espace probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et considère (X_k) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{B}(x)$. On note $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Ainsi, $S_n \sim \mathscr{B}(n,x)$ et donc par la formule de transfert,

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} = B_n(f)(x)$$

La fonction f est continue sur $[0,1]$ qui est un compact de $\mathbb{R}$, donc par le théorème de Heine ; elle y est uniformément continue. Soit donc $\epsilon > 0$,

$$\exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in [0,1], |x-y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

On a,

$$\begin{aligned}
|B_n(f)(x) - f(x)| &= \left| \mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f(x) \right| \\
&= \left| \mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right) \right| \\
&\leq \mathbb{E}\left| f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x) \right| \\
&\leq \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| < \eta\right\}} \left| f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x) \right| \right) + \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \eta\right\}} \left| f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x) \right| \right) \\
&\leq \mathbb{E}(\epsilon) + 2\|f\|_\infty \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \eta\right\}}\right) \\
&= \epsilon + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \eta\right) \qquad (*)
\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right) = x$, on peut appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \eta\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq \eta\right) \leq \frac{1}{\eta^2} \operatorname{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right)$$

Comme les X_k sont indépendantes et de même loi :

$$\operatorname{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\operatorname{Var}(S_n) = \frac{1}{n}\operatorname{Var}(X_1) = \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

En réinjectant cela dans $(*)$, cela donne

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \epsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{n\eta^2}$$

qui est une majoration indépendante de x. Comme la fonction $B_n(f) - f$ est continue sur $[0,1]$, on peut passer à la borne supérieure :

$$\|B_n(f) - f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |B_n(f)(x) - f(x)| \leq \epsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{n\eta^2}$$

ce qui donne après un passage à la limite supérieure :

$$\begin{aligned} & \limsup_{n\to+\infty} \|B_n(f) - f\|_\infty \leq \epsilon \\ \overset{\epsilon\longrightarrow 0}{\Longrightarrow} & \limsup_{n\to+\infty} \|B_n(f) - f\|_\infty = 0 \\ \Longrightarrow & \lim_{n\to+\infty} \|B_n(f) - f\|_\infty = 0 \end{aligned}$$

□

Théorème 2 (Weierstrass)**.** Toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$) est limite uniforme de fonctions polynômiales sur $[a,b]$.

Démonstration. On va avoir besoin du changement de variable suivant :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & [a,b] \\ x & \mapsto & a + (b-a)x \end{array}$$

Par le Théorème 1, la fonction $f \circ \varphi$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynômiales (p_n). Donc f est limite uniforme de la suite $(p_n \circ \varphi^{-1})$ où $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n \circ \varphi^{-1}$ est bien une fonction polynômiale car φ (donc φ^{-1} aussi) est affine. □

Bibliographie

De l'intégration aux probabilités [G-K]

Olivier GARET et Aline KURTZMANN. *De l'intégration aux probabilités.* 2e éd. Ellipses, 28 mai 2019. https://www.editions-ellipses.fr/accueil/4593-14919-de-l-integration-aux-probabilites-2e-edition-augmentee-9782340030206.html.