Théorème des événements rares de Poisson

On établit la convergence en loi vers une loi de Poisson d'une suite de variables aléatoires.

Lemme 1. Soient $z_1, \dots, z_n, u_1, \dots u_n \in \mathbb{C}$ de module inférieur ou égal à 1. Alors [G-K] p. 372

$$|z_1 \dots z_n - u_1 \dots u_n| \leq |z_1 - u_1| + \dots |z_n - u_n|$$

Démonstration. $|z_1 z_2 - u_1 u_2| = |z_1(z_2 - u_2) + u_2(z_1 - u_1)| \leq |z_1 - u_1| + |z_2 - u_2|$. On procède ensuite par récurrence pour montrer le résultat. □

Théorème 2 (des événements rares de Poisson)**.** Soit $(N_n)_{n \geq 1}$ une suite d'entiers tendant vers l'infini. On suppose que pour tout n, $A_{n,N_1}, \dots, A_{n,N_n}$ sont des événements indépendants avec $\mathbb{P}(A_{n,N_k}) = p_{n,k}$. On suppose également que : p. 390

(i) $\lim_{n \to +\infty} s_n = \lambda > 0$ où $\forall n \in \mathbb{N}, s_n = \sum_{k=1}^{N_n} p_{n,k}$.

(ii) $\lim_{n \to +\infty} \sup_{k \in [\![1, N_n]\!]} p_{n,k} = 0$.

Alors, la suite de variables aléatoires (S_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^{N_n} \mathbb{1}_{A_{n,k}}$$

converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre λ.

Démonstration. Pour la suite, on note $\forall n \in \mathbb{N}$, $m_n = \max_{k \in [\![1, N_n]\!]} p_{n,k}$. On calcule

$$\begin{aligned}
\phi_{S_n}(t) &= \mathbb{E}\left(e^{itS_n}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(e^{it\sum_{k=1}^{N_n} \mathbb{1}_{A_{n,k}}}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{N_n} e^{it\mathbb{1}_{A_{n,k}}}\right) \\
&= \prod_{k=1}^{N_n} \mathbb{E}\left(e^{it\mathbb{1}_{A_{n,k}}}\right) \text{ par indépendance} \\
&= \prod_{k=1}^{N_n} \left((1 - p_{n,k}) + e^{it} p_{n,k}\right) \\
&= \prod_{k=1}^{N_n} \left(p_{n,k}(e^{it} - 1) + 1\right)
\end{aligned}$$

l'avant-dernière égalité étant justifiée par le fait que

$$\mathbb{P}(e^{it\mathbb{1}_{A_{n,k}}} = e^{it}) = \mathbb{P}(A_{n,k} = 1) = p_{n,k} \text{ et } \mathbb{P}(e^{it\mathbb{1}_{A_{n,k}}} = 1) = \mathbb{P}(A_{n,k} = 0) = 1 - p_{n,k}$$

Soient $P_{n,k}$ des variables aléatoires indépendantes suivant les lois de Poisson de paramètres respectifs $p_{n,k}$. On pose

$$S'_n = \sum_{k=1}^{N_n} P_{n,k}$$

et on calcule la fonction caractéristique de cette nouvelle variable aléatoire :

$$\begin{aligned}
\phi_{S'_n}(t) &= \prod_{k=1}^{N_n} \phi_{P_{n,k}}(t) \text{ par indépendance} \\
&= \prod_{k=1}^{N_n} \exp(p_{n,k}(e^{it}-1))) \\
&= \exp(s_n(e^{it}-1))
\end{aligned}$$

Par différence, on obtient

$$|\phi_{S_n}(t) - \phi_{S'_n}(t)| = \left| \prod_{k=1}^{N_n} \left(p_{n,k}(e^{it}-1)+1\right) - \prod_{k=1}^{N_n} \exp(p_{n,k}(e^{it}-1))) \right|$$

ce qui, après application du Lemme 1, donne l'inégalité

$$|\phi_{S_n}(t) - \phi_{S'_n}(t)| \leq \sum_{k=1}^{N_n} g(p_{n,k}(e^{it}-1))$$

avec $g : z \mapsto |e^z - 1 - z|$. Mais, par développement en série entière :

$$\begin{aligned}
g(z) &= \left| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{k+2}}{(k+2)!} \right| \\
&= \left| z^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right| \\
&\leq |z|^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|z|^k}{k!} \left| \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right| \\
&\leq |z|^2 \frac{e^{|z|}}{2}
\end{aligned}$$

Mais, comme $|p_{n,k}(e^{it}-1)| \leq 2p_{n,k} \leq 2$, on a :

$$\begin{aligned}
|\phi_{S_n}(t) - \phi_{S'_n}(t)| &\leq \sum_{k=1}^{N_n} (2p_{n,k})^2 \frac{e^2}{2} \\
&= 2e^2 \sum_{k=1}^{N_n} 2p_{n,k}^2 \\
&\leq 2e^2 \underbrace{s_n}_{\longrightarrow \lambda} \underbrace{m_n}_{\longrightarrow 0} \\
&\longrightarrow 0
\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}|\phi_{S_n}(t) - \exp(\lambda(e^{it}-1))| &\leq |\phi_{S_n}(t) - \phi_{S'_n}(t)| + |\phi_{S'_n}(t) - \exp(\lambda(e^{it}-1))| \\ &\leq \underbrace{|\phi_{S_n}(t) - \phi_{S'_n}(t)|}_{\longrightarrow 0} + \underbrace{|\exp(s_n(e^{it}-1)) - \exp(\lambda(e^{it}-1))|}_{\longrightarrow 0 \text{ car } s_n \longrightarrow \lambda} \quad \longrightarrow 0\end{aligned}$$

et le théorème de Lévy permet de conclure. $\square$

Bibliographie

De l'intégration aux probabilités **[G-K]**

Olivier GARET et Aline KURTZMANN. *De l'intégration aux probabilités.* 2e éd. Ellipses, 28 mai 2019. https://www.editions-ellipses.fr/accueil/4593-14919-de-l-integration-aux-probabilites-2e-edition-augmentee-9782340030206.html.