Lemme des noyaux

On montre par récurrence le lemme des noyaux pour un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, et on applique ce résultat pour obtenir un critère de diagonalisation.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ sur un corps commutatif $\mathbb{K}$.

[GOU21] p. 185

Théorème 1 (Lemme des noyaux)**.** Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $P = P_1 \dots P_k \in \mathbb{K}[X]$ (les P_i étant supposés premiers entre eux deux-à-deux). Alors,

$$\operatorname{Ker}(P(f)) = \bigoplus_{i=1}^{k} \operatorname{Ker}(P_i(f))$$

Démonstration. On procède par récurrence sur $k \geq 2$.

— Pour $k = 2$: par le théorème de Bézout, il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $UP_1 + VP_2 = 1$. Donc,

$$\forall x \in E, (UP_1 + VP_2)(f)(x) = (U(f) \circ P_1(f))(x) + (V(f) \circ P_2(f))(x) = x \qquad (*)$$

Soit $x \in \operatorname{Ker}(P_1(f)) \cap \operatorname{Ker}(P_2(f))$. On a :

$$x \overset{(*)}{=} (U(f) \circ P_1(f))(x) + (V(f) \circ P_2(f))(x) \overset{x \in \operatorname{Ker}(P_1(f)) \cap \operatorname{Ker}(P_2(f))}{=} 0$$

Donc $\operatorname{Ker}(P_1(f)) \cap \operatorname{Ker}(P_2(f)) = \{0\}$: la somme est directe.

Soit maintenant $x \in \operatorname{Ker}(P(f))$. Par calcul,

$$P_2(f)(UP_1(f)(x)) = (UP_1P_2)(f)(x) = (U(f) \circ P(f))(x) = 0$$

ie. $UP_1(f)(x) \in \operatorname{Ker}(P_2(f))$. De même, $VP_2(f)(x) \in \operatorname{Ker}(P_1(f))$. Par $(*)$, $x \in \operatorname{Ker}(P_1(f)) + \operatorname{Ker}(P_2(f))$. Donc $\operatorname{Ker}(P(f)) \subseteq \operatorname{Ker}(P_1(f)) \oplus \operatorname{Ker}(P_2(f))$.

Et si $x \in \operatorname{Ker}(P_1(f))$,

$$P(f)(x) = (P_1(f) \circ P_2(f))(x) = (P_2(f) \circ P_1(f))(x) = 0$$

donc $x \in \operatorname{Ker}(P(f))$ et $\operatorname{Ker}(P_1)(f) \subseteq \operatorname{Ker}(P(f))$. De même, on montre que $\operatorname{Ker}(P_2)(f) \subseteq \operatorname{Ker}(P(f))$. Comme $\operatorname{Ker}(P(f))$ est un espace vectoriel, on a bien l'inclusion réciproque.

— On suppose le résultat vrai à un rang $k \geq 2$. Montrons qu'il reste vrai au rang $k+1$. Écrivons

$$P = Q_1 Q_2 \text{ avec } Q_1 = P_1 \dots P_k, Q_2 = P_{k+1}$$

Les polynômes Q_1 et Q_2 sont premiers entre eux, donc le cas $k = 2$ permet d'obtenir :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(P(f)) &= \mathrm{Ker}(Q_1(f)) \oplus \mathrm{Ker}(Q_2(f)) \\ &= \left(\bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(P_i(f))\right) \oplus \mathrm{Ker}(P_{k+1}(f)) \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= \bigoplus_{i=1}^{k+1} \mathrm{Ker}(P_i(f))\end{aligned}$$

ce que l'on voulait.

□

Application 2. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors f est diagonalisable si et seulement s'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples tel que $P(f) = 0$.

Démonstration. Sens direct : Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres distinctes de f et $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_k}$ les sous-espaces propres correspondants. On pose

$$P = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_k) \in \mathbb{K}[X]$$

On peut appliquer le Théorème 1 :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(P(f)) &= \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \, \mathrm{id}_E) \\ &= \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i} \\ &\overset{f \text{ diagonalisable}}{=} E\end{aligned}$$

donc $P(f) = 0$ (et P est bien scindé à racines simples).

Réciproque : On écrit

$$P = \alpha (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_k)$$

avec les $\lambda_i \in \mathbb{K}$ distincts et $\alpha \neq 0$. On peut encore appliquer Théorème 1 :

$$\begin{aligned}E &= \mathrm{Ker}(P(f)) \\ &= \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \, \mathrm{id}_E) \qquad (*)\end{aligned}$$

Notons $I = \{i \in [\![1, k]\!] \mid \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \, \mathrm{id}_E) \neq \{0\}\}$. $\forall i \in I$, λ_i est valeur propre de f et $E_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \, \mathrm{id}_E)$ n'est autre que le sous-espace propre correspondant. Par $(*)$,

$$E = \bigoplus_{i \in I} E_{\lambda_i}$$

donc f est diagonalisable. □

Bibliographie

Les maths en tête **[GOU21]**

Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités.* 3e éd. Ellipses, 13 juill. 2021. https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html.