

# 101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Soit  $G$  un groupe.

## I - Actions de groupe

Soit  $X \neq \emptyset$  un ensemble.

### 1. Cas général

**Définition 1.** On appelle **action** (à gauche) de  $G$  sur  $X$  toute application

$$\begin{aligned} G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

satisfaisant les conditions suivantes :

- (i)  $\forall g, h \in G, \forall x \in X, g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x.$
- (ii)  $\forall x \in X, e_G \cdot x = x.$

[ULM21]  
p. 29

*Remarque 2.* On peut de même définir une action à droite de  $G$  sur  $X$ .

**Exemple 3.** — Le groupe  $S_X$  des bijections de  $X$  dans  $X$  opère naturellement sur  $X$  par la relation  $\sigma \cdot x = \sigma(x)$  pour tout  $\sigma \in S_X$  et pour tout  $x \in X$ .

— Pour un espace vectoriel  $V$ , le groupe  $GL(V)$  opère sur  $V$ .

On supposera par la suite que  $G$  agit sur  $X$  à gauche via l'action  $\cdot$ .

**Théorème 4.** On a une correspondance bijective entre les actions de  $G$  sur  $X$  et les morphismes de  $G$  dans  $S_X$ . En effet, si  $\cdot$  désigne une action de  $G$  sur  $X$ , on peut y faire correspondre le morphisme

$$\varphi : \begin{aligned} G &\rightarrow S_X \\ g &\mapsto (x \mapsto g \cdot x) \end{aligned}$$

**Définition 5.** On définit pour tout  $x \in X$  :

- $G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\} \subseteq X$  l'**orbite** de  $x$ .
- $\text{Stab}_G(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\} < G$  le **stabilisateur** de  $x$ .

On dit que l'action de  $G$  sur  $X$  est :

- **Libre** si  $\text{Stab}_G(x) = \{e_G\}$  pour tout  $x \in X$ .

— **Transitive** si  $G$  n'admet qu'une seule orbite.

**Exemple 6.** L'action du groupe diédral  $\mathcal{D}_3$  sur les sommets d'un triangle équilatéral est transitive mais n'est pas libre.

**Proposition 7.** La relation  $\sim$  définie sur  $X$  par

$$x \sim y \iff x \in G \cdot y$$

est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont les orbites des éléments de  $X$  sous l'action de  $G$ .

**Application 8.** Toute permutation  $\sigma \in S_n$  s'écrit comme produit

$$\sigma = \gamma_1 \cdots \gamma_m$$

de cycles  $\gamma_i$  de longueur  $\geq 2$  dont les supports sont deux-à-deux disjoints. Cette décomposition est unique à l'ordre près.

[PER]  
p. 57

**Définition 9.** Une action  $\varphi : G \rightarrow S_X$  une action de  $G$  sur  $X$  est dite **fidèle** si  $\text{Ker}(\varphi) = \{e_G\}$ .

[ULM21]  
p. 33

**Proposition 10.** Soit  $\varphi : G \rightarrow S_X$  une action de  $G$  sur  $X$ . Alors,

$$\text{Ker}(\varphi) = \bigcap_{x \in X} \text{Stab}_G(x)$$

**Corollaire 11.** Une action libre est fidèle.

**Proposition 12.** Soit  $x \in X$ . L'application

$$f : \begin{array}{l} G / \text{Stab}_G(x) \rightarrow G \cdot x \\ g \text{Stab}_G(x) \mapsto g \cdot x \end{array}$$

est une bijection.

p. 71

*Remarque 13.* Attention cependant,  $G / \text{Stab}_G(x)$  n'est pas un groupe en général.

## 2. Cas fini

On suppose ici que  $G$  et  $X$  sont finis.

**Proposition 14.** Soit  $x \in X$ . Alors :

- $|G \cdot x| = (G : \text{Stab}_G(x))$ .
- $|G| = |\text{Stab}_G(x)| |G \cdot x|$ .
- $|G \cdot x| = \frac{|G|}{|\text{Stab}_G(x)|}$

**Théorème 15** (Formule des classes). Soit  $\Omega$  un système de représentants associé à la relation  $\sim$  de la Proposition 7. Alors,

$$|X| = \sum_{\omega \in \Omega} |G \cdot \omega| = \sum_{\omega \in \Omega} (G : \text{Stab}_G(\omega)) = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{|G|}{|\text{Stab}_G(\omega)|}$$

**Définition 16.** On définit :

- $X^G = \{x \in X \mid \forall g \in G, g \cdot x = x\}$  l'ensemble des points de  $X$  laissés fixes par tous les éléments de  $G$ .
- $X^g = \{x \in X \mid g \cdot x = x\}$  l'ensemble des points de  $X$  laissés fixes par  $g \in G$ .

**Théorème 17** (Formule de Burnside). Le nombre  $r$  d'orbites de  $X$  sous l'action de  $G$  est donné par

$$r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

**Corollaire 18.** Soit  $p$  un nombre premier. Si  $G$  est un  $p$ -groupe (ie. l'ordre de  $G$  est une puissance de  $p$ ), alors,

$$|X^G| \equiv |X| \pmod{p}$$

**Corollaire 19.** Soit  $p$  un nombre premier. Le centre d'un  $p$ -groupe non trivial est non trivial.

**Corollaire 20.** Soit  $p$  un nombre premier. Un groupe d'ordre  $p^2$  est toujours abélien.

**Application 21** (Théorème de Cauchy). On suppose  $G$  non trivial et fini. Soit  $p$  un premier divisant l'ordre de  $G$ . Alors il existe un élément d'ordre  $p$  dans  $G$ .

## II - Action d'un groupe sur un groupe

### 1. Action par translation

**Proposition 22.**  $G$  agit sur lui-même par translation (à gauche) via l'action

$$(g, h) \mapsto g \cdot h = gh$$

De plus, cette action est fidèle et transitive.

p. 34

**Application 23** (Théorème de Cayley). Tout groupe fini d'ordre  $n$  est isomorphe à un sous-groupe de  $S_n$ .

**Proposition 24.** Soit  $H < G$ . Alors  $G$  agit sur  $G/H$  via l'action

$$(g, hH) \mapsto g \cdot hH = (gh)H$$

De plus, cette action est transitive.

**Proposition 25.** Soit  $H < G$ . Soit  $\varphi : G \rightarrow S_{G/H}$  le morphisme de l'action par translation de  $G$  sur  $G/H$ . Alors,

$$\text{Ker}(\varphi) = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}$$

**Application 26.** On suppose que  $G$  est de cardinal infini et que  $G$  possède un sous-groupe d'indice fini distinct de  $G$ . Alors  $G$  n'est pas simple.

[PER]  
p. 17

### 2. Action par conjugaison

**Proposition 27.**  $G$  agit sur lui-même par conjugaison via l'action

$$(g, h) \mapsto g \cdot h = ghg^{-1}$$

[ULM21]  
p. 36

**Définition 28.** — L'orbite de  $g \in G$  sous l'action par conjugaison de  $G$  sur lui-même s'appelle la **classe de conjugaison de  $g$** .

- Le stabilisateur de  $g \in G$  sous l'action par conjugaison de  $G$  sur lui-même s'appelle le **centralisateur de  $g$** .
- Deux éléments de  $G$  qui appartiennent à la même classe de conjugaison sont dits **conjugués**.

**Exemple 29.** — Si  $\sigma = (a_1 \dots a_p) \in S_n$  est un  $p$ -cycle, et si  $\tau \in S_n$ , alors

$$\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(a_1) \dots \tau(a_p))$$

- Par conséquent, dans  $S_n$ , les  $p$ -cycles sont conjugués.
- Pour  $n \geq 5$ , les 3-cycles sont conjugués dans  $A_n$ .

**Proposition 30.** Soit  $g \in G$ . Alors  $g$  appartient au centre de  $G$  (noté  $Z(G)$ ) si et seulement si sa classe de conjugaison est réduite à un seul élément.

[ULM21]  
p. 36

**Corollaire 31.**  $Z(G)$  est l'union des classes de conjugaison de taille 1.

**Proposition 32.** Soit  $\Omega$  un système de représentants associé à la relation  $\sim$  de la Proposition 7 pour l'action par conjugaison. On note  $\Omega' = Z(G) \setminus \Omega$ . Alors,

[GOU21]  
p. 24

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{\omega \in \Omega'} \frac{|G|}{|\text{Stab}_G(\omega)|}$$

**Application 33** (Théorème de Wedderburn). Tout corps fini est commutatif.

p. 100

**Proposition 34.**  $G$  agit sur ses sous-groupes par conjugaison via l'action

[ULM21]  
p. 38

$$(g, H) \mapsto g \cdot H = gHg^{-1}$$

**Proposition 35.** Soit  $H < G$ . Alors  $H$  est distingué dans  $G$  si et seulement si  $H$  est un point fixe pour l'action de la Proposition 34.

## III - Action d'un groupe sur un espace vectoriel

### 1. Action par conjugaison sur les espaces de matrices

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$  sur un corps  $\mathbb{K}$ .

**Proposition 36.** L'application

[ROM21]  
p. 199

$$\begin{aligned} \text{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ (P, A) &\mapsto PAP^{-1} \end{aligned}$$

définit une action de  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**Définition 37.** Deux matrices qui sont dans la même orbite pour cette action sont dites **semblables**.

*Remarque 38.* Deux matrices semblables représentent la même application linéaire dans deux bases de  $\mathbb{K}^n$ .

[GOU21]  
p. 127

C'est cette remarque qui justifie que l'on va étudier l'action par conjugaison de  $GL_n(\mathbb{K})$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**Théorème 39.** Soient  $A$  et  $B$  deux matrices semblables. Alors :

- $\text{trace}(A) = \text{trace}(B)$ .
- $\det(A) = \det(B)$ .
- $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$ .
- $\chi_A = \chi_B$ .
- $\pi_A = \pi_B$ .

[ROM21]  
p. 199

**Contre-exemple 40.** Les matrices  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  ont la même trace, le même déterminant, le même polynôme caractéristique, mais ne sont pas semblables.

[D-L]  
p. 137

**Théorème 41.** Soient  $\mathbb{L}$  une extension de  $\mathbb{K}$  et  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On suppose  $\mathbb{K}$  infini et  $A, B$  semblables sur  $\mathbb{L}$ . Alors  $A$  et  $B$  sont semblables sur  $\mathbb{K}$ .

[GOU21]  
p. 167

**Notation 42.** Soient  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $x \in E$ . On note  $P_{f,x}$  le polynôme unitaire engendrant l'idéal  $\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(f)(x) = 0\}$  et  $E_{f,x} = \{P(f)(x) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ .

[GOU21]  
p. 397

**Lemme 43.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

- (i) Si  $k = \deg(\pi_f)$ , alors  $\mathbb{K}[f]$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$  de dimension  $k$ , dont une base est  $(f^i)_{i \in [0, k-1]}$ .
- (ii) Soit  $x \in E$ . Si  $l = \deg(P_{f,x})$ , alors  $E_x$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $l$ , dont une base est  $(f^i(x))_{i \in [0, l-1]}$ .

**Lemme 44.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Il existe  $x \in E$  tel que  $P_{f,x} = \pi_f$ .

**Théorème 45** (Frobenius). Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Il existe des sous-espaces vectoriels  $F_1, \dots, F_r$  de  $E$  tous stables par  $f$  tels que :

- (i)  $E = \bigoplus_{i=1}^r F_i$ .
- (ii)  $\forall i \in [1, r]$ , la restriction  $f_i = f|_{F_i}$  est un endomorphisme cyclique de  $F_i$ .

[DEV]

(iii) Si  $P_i = \pi_{f_i}$  est le polynôme minimal de  $f_i$ , on a  $P_{i+1} \mid P_i \forall i \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$ .

La suite  $(P_i)_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket}$  ne dépend que de  $f$  et non du choix de la décomposition (elle est donc unique). On l'appelle **suite des invariants de  $f$** .

**Corollaire 46.** Deux endomorphismes sont semblables si et seulement s'ils ont les mêmes invariants de similitude.

## 2. Représentations linéaires et caractères

Dans cette partie, on suppose que  $G$  est d'ordre fini.

[ULM21]  
p. 144

**Définition 47.** — Une **représentation linéaire**  $\rho$  est un morphisme de  $G$  dans  $GL(V)$  où  $V$  désigne un espace-vectoriel de dimension finie  $n$  sur  $\mathbb{C}$ .

- On dit que  $n$  est le **degré** de  $\rho$ .
- On dit que  $\rho$  est **irréductible** si  $V \neq \{0\}$  et si aucun sous-espace vectoriel de  $V$  n'est stable par  $\rho(g)$  pour tout  $g \in G$ , hormis  $\{0\}$  et  $V$ .

**Exemple 48.** Soit  $\varphi : G \rightarrow S_n$  le morphisme structural d'une action de  $G$  sur un ensemble de cardinal  $n$ . On obtient une représentation de  $G$  sur  $\mathbb{C}^n = \{e_1, \dots, e_n\}$  en posant

$$\rho(g)(e_i) = e_{\varphi(g)(i)}$$

c'est la représentation par permutations de  $G$  associée à l'action. Elle est de degré  $n$ .

**Définition 49.** La représentation par permutations de  $G$  associée à l'action par translation à gauche de  $G$  sur lui-même est la **représentation régulière** de  $G$ , on la note  $\rho_G$ .

**Définition 50.** On peut associer à toute représentation linéaire  $\rho$ , son **caractère**  $\chi = \text{trace} \circ \rho$ . On dit que  $\chi$  est **irréductible** si  $\rho$  est irréductible.

p. 150

**Proposition 51.** (i) Les caractères sont des fonctions constantes sur les classes de conjugaison.

(ii) Il y a autant de caractères irréductibles que de classes de conjugaisons.

**Définition 52.** Soit  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  une représentation linéaire de  $G$ . On suppose  $V = W \oplus W_0$  avec  $W$  et  $W_0$  stables par  $\rho(g)$  pour tout  $g \in G$ . On dit alors que  $\rho$  est **somme directe** de  $\rho_W$  et de  $\rho_{W_0}$ .

**Théorème 53** (Maschke). Toute représentation linéaire de  $G$  est somme directe de représentations irréductibles.

**Théorème 54.** Les sous-groupes distingués de  $G$  sont exactement les

$$\bigcap_{i \in I} \text{Ker}(\rho_i) \text{ où } I \in \mathcal{P}(\llbracket 1, r \rrbracket)$$

**Corollaire 55.**  $G$  est simple si et seulement si  $\forall i \neq 1, \forall g \neq e_G, \chi_i(g) \neq \chi_i(e_G)$ .

[PEY]  
p. 231

# Bibliographie

## **Leçons pour l'agrégation de mathématiques**

[D-L]

Maximilien DREVETON et Joachim LHABOUZ. *Leçons pour l'agrégation de mathématiques. Préparation à l'oral*. Ellipses, 28 mai 2019.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3543-13866-lecons-pour-lagregation-de-mathematiques-preparation-a-loral-9782340030183.html>.

## **Les maths en tête**

[GOU21]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 13 juill. 2021.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html>.

## **Cours d'algèbre**

[PER]

Daniel PERRIN. *Cours d'algèbre. pour l'agrégation*. Ellipses, 15 fév. 1996.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/7778-18110-cours-d-algebre-agregation-9782729855529.html>.

## **L'algèbre discrète de la transformée de Fourier**

[PEY]

Gabriel PEYRÉ. *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier. Niveau M1*. Ellipses, 15 jan. 2004.

<https://adtf-livre.github.io/>.

## **Mathématiques pour l'agrégation**

[ROM21]

Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie*. 2<sup>e</sup> éd. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332201-mathematiques-pour-l-agregation-algebre-et-geometrie>.

## **Théorie des groupes**

[ULM21]

Felix ULMER. *Théorie des groupes. Cours et exercices*. 2<sup>e</sup> éd. Ellipses, 3 août 2021.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13760-25304-theorie-des-groupes-2e-edition-9782340057241.html>.