102 Groupe des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Applications.

I - Nombres complexes de module 1

1. Le groupe $\mathbb{U}$

Définition 1. On définit

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

le groupe abélien des nombres complexes de module 1. [ROM21] p. 36

Proposition 2. L'application

$$\exp(i\theta) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

(où exp est définie dans la sous-section suivante) définit un isomorphisme de $\mathbb{U}$ dans $SO_2(\mathbb{R})$.

Proposition 3. Un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ est soit dense dans $\mathbb{R}$, soit de la forme $n\mathbb{Z}$. [FGN3] p. 51

Corollaire 4. Un sous-groupe de $\mathbb{U}$ est soit fini, soit dense dans $\mathbb{U}$.

Corollaire 5. Soit $\theta \notin 2\pi\mathbb{Q}$. $\{e^{in\theta} \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{U}$.

Application 6. $\{sin(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Proposition 7. $\mathbb{U}$ est un sous-groupe compact et connexe de $\mathbb{C}^*$. [GOU20] p. 44

Application 8. Soit $f : \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ continue. Alors il existe deux points diamétralement opposés de $\mathbb{U}$ qui ont la même image par f.

2. L'exponentielle complexe

Définition 9. On définit la fonction **exponentielle complexe** pour tout $z \in \mathbb{C}$ par [QUE] p. 4

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

on note cette somme e^z ou parfois $\exp(z)$.

Remarque 10. Cette somme est bien définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ d'après le critère de d'Alembert.

Proposition 11. (i) $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.
(ii) exp est holomorphe sur $\mathbb{C}$, de dérivée elle-même.
(iii) exp ne s'annule jamais.

Proposition 12. La fonction $\varphi : t \mapsto e^{it}$ est un morphisme surjectif de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{U}$.

Proposition 13. En reprenant les notations précédentes, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$, de la forme $\mathrm{Ker}(\varphi) = a\mathbb{Z}$. On note $a = 2\pi$.

3. Trigonométrie

Définition 14. Les fonctions sin et cos sont définies sur $\mathbb{R}$ par
— $\cos(t) = \mathrm{Re}(e^{it}) = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$.
— $\sin(t) = \mathrm{Im}(e^{it}) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Proposition 15. Ces fonctions sont réelles, 2π-périodiques, et admettent un développement en série entière de rayon de convergence infini. On peut en particulier les prolonger sur le plan complexe entier.

Proposition 16. Tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ peut s'écrire de la manière suivante : [R-R] p. 259

$$z = |z| e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

Proposition 17 (Formule de Moivre)**.**

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

[GOU20] p. 271

Application 18 (Calcul du noyau de Dirichlet)**.**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \sum_{k=-n}^{n} \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

II - Le groupe des racines de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Racines n-ièmes de l'unité

Définition 19. Étant donnés $\alpha \in \mathbb{C}$, on appelle : [R-R] p. 259

- **Racine n-ième de α** tout nombre $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = \alpha$.
- **Racine n-ième de l'unité** toute racine n-ième de 1. On note μ_n cet ensemble.

Exemple 20. Les racines cubiques de l'unité sont 1, $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\overline{j}$.

Proposition 21. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il y a n racines n-ièmes de l'unité, données par

$$e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \cos\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)$$

où k parcourt les entiers de 0 à $n-1$.

Corollaire 22. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$$

Corollaire 23. Tout nombre complexe non nul α écrit $\alpha = re^{i\theta}$ admet exactement n racines n-ièmes données par

$$\sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}} e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

où k parcourt les entiers de 0 à $n-1$.

Proposition 24. μ_n est un groupe, et l'application [GOZ] p. 67

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \to & \mu_n \\ k & \mapsto & e^{\frac{2ik\pi}{n}} \end{array}$$

est un isomorphisme.

Proposition 25. $\mathbb{C}^*$ admet exactement un sous-groupe d'ordre n : μ_n. [ROM21] p. 36

2. Générateurs et polynômes cyclotomiques

Définition 26. L'ensemble des générateurs de μ_n, noté μ_n^*, est formé des **racines primitives n-ièmes de l'unité**. [GOZ] p. 67

Proposition 27. (i) $\mu_n^* = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in [\![0, n-1]\!], \operatorname{pgcd}(k, m) = 1\}$.

(ii) $|\mu_n^*| = \varphi(n)$, où φ désigne l'indicatrice d'Euler.

Définition 28. On appelle **n-ième polynôme cyclotomique** le polynôme

$$\Phi_n = \prod_{\xi \in \mu_n^*} (X - \xi)$$

Théorème 29. (i) $X^n - 1 = \prod_{d \mid n} \Phi_d$.

(ii) $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$.

(iii) Φ_n est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

Corollaire 30. Le polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ de tout élément ξ de μ_n^* est Φ_n. En particulier,

$$[\mathbb{Q}(\xi) : \mathbb{Q}] = \varphi(m)$$

Application 31 (Théorème de Wedderburn)**.** Tout corps fini est commutatif.

[DEV] **Application 32** (Dirichlet faible)**.** Pour tout entier n, il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo n. [GOU21] p. 99

III - Applications en algèbre

1. Une application géométrique

Proposition 33 (Déterminant circulant)**.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Alors p. 153

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} P(\omega^j)$$

où $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

Application 34 (Suite de polygones)**.** Soit P_0 un polygone dont les sommets sont $\{z_{0,1}, \dots, z_{0,n}\}$. On définit la suite de polygones (P_k) par récurrence en disant que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les sommets de P_{k+1} sont les milieux des arêtes de P_k. [I-P] p. 389

Alors la suite (P_k) converge vers l'isobarycentre de P_0.

2. Racines de polynômes

[DEV] **Théorème 35** (Kronecker)**.** Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire tel que toutes ses racines complexes appartiennent au disque unité épointé en l'origine (que l'on note D). Alors toutes ses racines sont des racines de l'unité. p. 279

Corollaire 36. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire et irréductible sur $\mathbb{Q}$ tel que toutes ses racines complexes soient de module inférieur ou égal à 1. Alors $P = X$ ou P est un polynôme cyclotomique.

3. Dual d'un groupe

Soit G un groupe fini de cardinal n.

Définition 37. Un **caractère** est un morphisme de G dans $\mathbb{C}^*$. On note $\widehat{G}$ l'ensemble des caractères, qu'on appelle **dual** de G. [PEY] p. 2

Proposition 38. $\widehat{G}$ est un groupe pour la multiplication.

Proposition 39. (i) $\widehat{G}$ est constitué des morphismes de G dans μ_n.
(ii) $\forall g \in G, |\chi(g)| = 1$.
(iii) $\forall g \in G, \chi(g^{-1}) = \chi(g)^{-1} = \overline{\chi(g)}$.

Proposition 40. Si $G = \langle g_0 \rangle$, en notant ω une racine primitive n-ième de l'unité, les éléments de $\widehat{G}$ sont de la forme $g_0^k \mapsto (\omega^j)^k$ pour $j \in [\![0, n-1]\!]$.

Corollaire 41. Si G est cyclique, $G \cong \widehat{G}$.

4. Transformée de Fourier discrète

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

p. 64

Notation 42. Soit f un vecteur de $\mathbb{C}^N$. On note $f[k]$ ses coordonnées.

Définition 43. Soit f un vecteur de $\mathbb{C}^N$. La **transformée de Fourier discrète** de f est

$$\widehat{f} = \sum_{n=0}^{N-1} f[n]\omega_N^{-nk}$$

pour $k \in [\![0, N-1]\!]$ où l'on a noté $\omega_N = e^{\frac{2i\pi}{N}}$ une racine primitive N-ième de l'unité. On note

$$\mathscr{F} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^N & \rightarrow & \mathbb{C}^N \\ f & \mapsto & \widehat{f} \end{array}$$

Proposition 44 (Transformée de Fourier inverse)**.**

$$\forall n \in [\![0, N-1]\!], f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{f}[k]\omega_N^{nk}$$

Corollaire 45. Soit f un vecteur de $\mathbb{C}^N$. En notant f_1 le vecteur défini par

$$f_1[0] = \frac{1}{N} f[0] \text{ et } \forall n \in [\![1, \dots, N-1]\!], f_1[n] = \frac{1}{N} f[N-n]$$

on a

$$\mathscr{F}^{-1}(f) = \mathscr{F}(f_1)$$

Annexes

[I-P]
p. 389

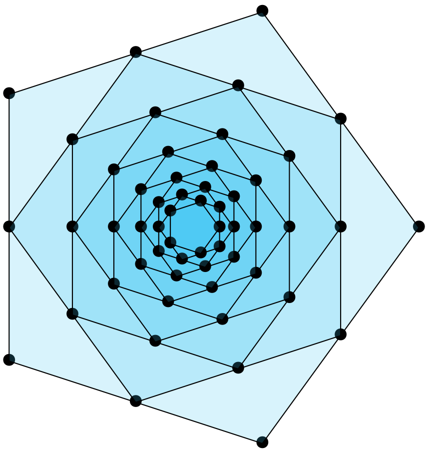

Figure 1 – La suite de polygones.

Bibliographie

Oraux X-ENS Mathématiques **[FGN3]**

Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas. *Oraux X-ENS Mathématiques. Volume 3.* 3e éd. Cassini, 27 mai 2020.
https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/103-oraux-x-ens-mathematiques-nouvelle-serie-vol-3.html.

Les maths en tête **[GOU20]**

Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Analyse.* 3e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html.

Les maths en tête **[GOU21]**

Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités.* 3e éd. Ellipses, 13 juill. 2021.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html.

Théorie de Galois **[GOZ]**

Ivan Gozard. *Théorie de Galois. Niveau L3-M1.* 2e éd. Ellipses, 1er avr. 2009.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/4897-15223-theorie-de-galois-niveau-l3-m1-2e-edition-9782729842772.html.

L'oral à l'agrégation de mathématiques **[I-P]**

Lucas Isenmann et Timothée Pecatte. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements.* 2e éd. Ellipses, 26 mars 2024.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html.

L'algèbre discrète de la transformée de Fourier **[PEY]**

Gabriel Peyré. *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier. Niveau M1.* Ellipses, 15 jan. 2004.
https://adtf-livre.github.io/.

Analyse complexe et applications **[QUE]**

Martine Queffféllec et Hervé Queffélec. *Analyse complexe et applications. Nouveau tirage.* Calvage & Mounet, 13 mai 2017.
http://www.calvage-et-mounet.fr/2022/05/09/analyse-complexe-et-applications/.

Formulaire de maths **[R-R]**

Olivier Rodot et Jean-Étienne Rombaldi. *Formulaire de maths. Avec résumés de cours.* De Boeck Supérieur, 30 août 2022.
https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807339880-formulaire-de-maths.

Mathématiques pour l'agrégation **[ROM21]**

Jean-Étienne Rombaldi. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie.* 2e éd. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.
https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332201-mathematiques-pour-l-agregation-algebre-et-geometrie.