103 Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

Soit G un groupe.

I - Conjugaison dans un groupe

1. Action de conjugaison

Lemme 1. On a une action de G sur lui-même :

$$\forall g, h \in G,\ g \cdot h = ghg^{-1}$$

[ROM21] p. 19

Définition 2. L'action précédente est appelée **action de conjugaison**. Le morphisme structurel de G dans $S(G)$ est noté Int :

$$\forall g, h \in G,\ \mathrm{Int}(g)(h) = ghg^{-1}$$

L'image de G par ce morphisme $\mathrm{Int}(G)$ est le groupe des **automorphismes intérieurs** de G.

Exemple 3. Le groupe additif d'un espace vectoriel est un groupe abélien dont le seul automorphisme intérieur est l'identité.

[ULM21] p. 20

Proposition 4. Muni de la composition, l'ensemble des automorphismes intérieurs de G est un groupe.

[GOU21] p. 21

2. Orbites et stabilisateurs

Définition 5. On considère l'action de conjugaison de G.

- Ses orbites sont les **classes de conjugaison** de G.
- Le stabilisateur d'un élément est le **centralisateur** de celui-ci.
- Deux éléments sont dits **conjugués** s'ils appartiennent à la même classe de conjugaison.

[PER] p. 15

Exemple 6. Les cycles de même ordre sont conjugués dans S_n.

p. 12

Définition 7. On définit le **centre** de G noté $Z(G)$ par

$$Z(G) = \{g \in G \mid \forall h \in H, gh = hg\}$$

Autrement dit, $Z(G)$ est l'intersection des centralisateurs des éléments de G.

Exemple 8. Si G est abélien, alors $Z(G) = G$.

Proposition 9. Soit $g \in G$. Alors, $g \in Z(G)$ si et seulement si sa classe de conjugaison est réduite à un élément.

$Z(G)$ est l'union des classes de conjugaison de taille 1.

[ULM21] p. 36

3. Application aux p-groupes

Définition 10. On dit que G est un **p-groupe** s'il est d'ordre une puissance d'un nombre premier p.

[ROM21] p. 22

Proposition 11. Soit p un nombre premier. Si G est un p-groupe opérant sur un ensemble X, alors,

$$|X^G| \equiv |X| \mod p$$

où X^G désigne l'ensemble des points fixes de X sous l'action de G.

Corollaire 12. On note $G \cdot h_1, \dots, G \cdot h_r$ les classes de conjugaison de G. Alors,

$$\begin{aligned} |G| &= |Z(G)| + \sum_{\substack{i=1 \\ |G \cdot h_i| = 2}}^{r} |G \cdot h_i| \\ &= |Z(G)| + \sum_{\substack{i=1 \\ |G \cdot h_i| = 2}}^{r} \frac{|G|}{|\mathrm{Stab}_G(h_i)|} \end{aligned}$$

Corollaire 13. Soit p un nombre premier. Le centre d'un p-groupe non trivial est non trivial.

Corollaire 14. Soit p un nombre premier. Un groupe d'ordre p^2 est toujours abélien.

Application 15 (Théorème de Cauchy)**.** On suppose G non trivial et fini. Soit p un premier divisant l'ordre de G. Alors il existe un élément d'ordre p dans G.

II - Sous-groupes distingués et groupes quotients

1. Classes à gauche et à droite

Proposition 16. Soit $H < G$. On définit la relation $\sim_H$ sur G par $g_1 \sim_H g_2 \iff g_1^{-1} g_2 \in H$. Alors :

(i) $\sim_H$ est une relation d'équivalence.

(ii) La classe d'équivalence d'un élément $g \in G$ pour $\sim_H$ est $\overline{g} = gH = \{gh \mid h \in H\}$ appelée **classe à gauche** de g modulo H.

[ULM21] p. 24

Remarque 17. On définit de la même manière la **classe à droite** d'un élément $g \in G$ modulo H que l'on note Hg.

Exemple 18. Soit $n > 2$. On considère $\mathscr{D}_n = \langle r, s \rangle$ le groupe diédral d'ordre $2n$. Alors,

$$r\langle s \rangle = \{r, rs\} \neq \{r, sr\} = \langle s \rangle r$$

Proposition 19. Soit $H < G$. Alors,

$$\forall g \in G, |hG| = |Gh| = |H|$$

2. Sous-groupes distingués

Définition 20. Soit $H < G$. On dit que H est **distingué** dans G si,

$$\forall g \in G,\ gH = Hg$$

On note cela $H \triangleleft G$.

[ROM21] p. 3

Exemple 21.
- $\{e_G\} \triangleleft G, G \triangleleft G$ et $Z(G) \triangleleft G$.
- L'intersection de deux sous-groupes distingués dans G est distinguée dans G.
- Si G est abélien, tout sous-groupe de G est distingué dans G.

Remarque 22. Le symbole $\triangleleft$ n'est pas transitif.

[GOU21] p. 20

Proposition 23.

$$H \triangleleft G \iff \forall g \in G,\ gHg^{-1} \subseteq H$$

[ULM21] p. 16

Proposition 24. Soient G_1 et G_2 deux groupes, et soient H_1 et H_2 deux sous-groupes respectivement de G_1 et de G_2. Soit $\varphi : G_1 \to G_2$ un morphisme. Alors :

(i) Si $H_1 \triangleleft G_1$, alors $\varphi(H_1) \triangleleft \varphi(G_1)$.

(ii) Si $H_2 \triangleleft G_2$, alors $\varphi^{-1}(H_2) \triangleleft G_1$.

En particulier, $\mathrm{Ker}(\varphi) \triangleleft G_1$.

Proposition 25. Soient $K < H < G$ une suite de sous-groupes. Alors, p. 43

$$K \triangleleft G \implies K \triangleleft H$$

Proposition 26. Soit $H < G$. Si $(G : H) = 2$, alors $H \triangleleft G$. p. 25

3. Groupes quotients

Définition 27. Soit $H < G$. **[ULM21]** p. 25

— On appelle **ensemble quotient** de G par la relation d'équivalence $\sim_H$ de la Proposition 16, et on note G/H, l'ensemble des classes à gauche de G modulo H.

— On appelle **indice** de G dans H, et on note $(G : H)$, le cardinal de G/H.

Proposition 28. Soit $H < G$. L'ensemble des classes à droite de G modulo H est aussi de cardinal égal à $(G : H)$.

Théorème 29. Un sous-groupe H de G est distingué si et seulement si $*$ définit une loi de groupe sur G/H par : p. 44

$$\forall g_1, g_2 \in G,\ g_1 H * g_2 H = (g_1 g_2) H$$

telle que la surjection canonique

$$\pi_H : \begin{array}{ccc} G & \to & G/H \\ g & \mapsto & gH \end{array}$$

soit un morphisme de groupes. Dans ce cas, π_H est un morphisme surjectif de noyau H.

Définition 30. Soit $H \triangleleft G$. On appelle **groupe quotient** le groupe $(G/H, *)$ définit dans le théorème précédent.

Exemple 31. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. $m\mathbb{Z}$ est un sous-groupe du groupe abélien $\mathbb{Z}$. On peut définir le groupe quotient $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$: c'est un groupe cyclique d'ordre m.

4. Théorèmes d'isomorphisme

Théorème 32 (Premier théorème d'isomorphisme)**.** Soient G_1 et G_2 deux groupes et soit $\varphi : G_1 \to G_2$ un morphisme. Alors φ induit un isomorphisme

$$\overline{\varphi} : \begin{array}{ccc} G_1/\mathrm{Ker}(\varphi) & \to & \varphi(G_1) \\ g\mathrm{Ker}(\varphi) & \mapsto & \varphi(g) \end{array}$$

[ULM21] p. 51

Exemple 33.
— Tout groupe cyclique d'ordre n est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
— $G/Z(G) \cong \mathrm{Int}(G)$.

Théorème 34 (Deuxième théorème d'isomorphisme)**.** Soient $H < G$ et $K \lhd G$. On pose $N = H \cap K$. Alors,

$$N \lhd H \text{ et } H/N \cong HK/K$$

p. 80

Exemple 35. On note V le sous-groupe de S_4 d'ordre 4 isomorphe au groupe de Klein. Alors,

$$V/S_4 \cong S_3$$

Théorème 36 (Troisième théorème d'isomorphisme)**.** Soient $H, K \lhd G$ tels que $H \subset K$. Alors,

$$K/H \lhd G/H \text{ et } (G/H)/(K/H) \cong G/K$$

p. 51

Exemple 37.

$$(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})/(2\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

III - Applications

1. Application au groupe symétrique

Lemme 38. Les 3-cycles sont conjugués dans A_n pour $n \geq 5$.

[PER] p. 15

Lemme 39. Le produit de deux transpositions est un produit de 3-cycles.

[ROM21] p. 49

Proposition 40. A_n est engendré par les 3-cycles pour $n \geq 3$.

[DEV]

Théorème 41. A_n est simple pour $n \geq 5$.

[PER] p. 28

Corollaire 42. Pour $n \geq 5$, les sous-groupes distingués de S_n sont S_n, A_n et $\{\mathrm{id}\}$.

Application 43. A_5 est le seul groupe simple d'ordre 60 à isomorphisme près. [ULM21] p. 92

2. Application au groupe linéaire d'un espace vectoriel

Dans cette partie, E désignera un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ de dimension finie n.

a. Centre

Définition 44. Soit H un hyperplan de E et soit $u \in \mathrm{SL}(E) \setminus \{\mathrm{id}_E\}$. Posons $D = \mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E)$. On dit que u est une **transvection** d'hyperplan H et de droite D si $u_{|H} = \mathrm{id}_H$ (et dans ce cas, $D \subset H$). [PER] p. 97

Proposition 45. $u \in \mathrm{GL}(E)$ est une transvection de droite D si et seulement si $u_{|D} = \mathrm{id}_D$ et le morphisme induit $\overline{u} : E/D \to E/D$ est l'identité.

Proposition 46. Soit τ une transvection de droite D et d'hyperplan H et soit $u \in \mathrm{GL}(E)$. Alors $u\tau u^{-1}$ est une transvection de droite $u(D)$ et d'hyperplan $u(H)$.

Corollaire 47. (i) $Z(\mathrm{GL}(E)) = \{\lambda \,\mathrm{id}_E \mid \lambda \in \mathbb{K}^*\}$.
(ii) $Z(\mathrm{SL}(E)) = Z(\mathrm{GL}(E)) \cap \mathrm{SL}(E) \cong \mu_n(\mathbb{K})$.

b. Conjugaison

Définition 48. Soit H un hyperplan de E et soit $u \in \mathrm{GL}(E) \setminus \mathrm{SL}(E)$. Posons $D = \mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E)$. On dit que u est une **dilatation de droite D et d'hyperplan** H si $u_{|H} = \mathrm{id}_H$.

Le **rapport** de cette dilatation est le scalaire $\det(u)$.

Proposition 49. Deux dilatations sont conjuguées dans $\mathrm{GL}(E)$ si et seulement si elles ont le même rapport.

Proposition 50. Deux transvections sont toujours conjuguées dans $\mathrm{GL}(E)$. Si $n \geq 3$, elles le sont aussi dans $\mathrm{SL}(E)$.

c. Groupe projectif

Définition 51. Le quotient de $\mathrm{GL}(E)$ par son centre est appelé **groupe projectif linéaire** et est noté $\mathrm{PGL}(E)$. De même, le quotient de $\mathrm{SL}(E)$ par son centre est noté $\mathrm{PSL}(E)$.

Remarque 52. Soit $h_\lambda : x \mapsto \lambda x$, on a $\det h_\lambda = \lambda^n$, de sorte qu'on a une suite exacte :

$$\{\overline{\mathrm{id}_E}\} \to \mathrm{PSL}(E) \to \mathrm{PGL}(E) \xrightarrow{\overline{\det}} \mathbb{K}^*/\mathbb{K}^{*n} \to \{\overline{\mathrm{id}_E}\}$$

où on a posé $\mathbb{K}^{*n} = \{\lambda \in \mathbb{K}^* \mid \exists \mu \in \mathbb{K}^*,\ \lambda = \mu^n\}$. En particulier, si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, $\mathrm{PSL}(E) \cong \mathrm{PGL}(E)$.

Théorème 53. Le groupe $\mathrm{PSL}(E)$ est simple sauf si $n = 2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$ ou $\mathbb{F}_3$.

3. Représentations linéaires de groupes finis

Dans cette partie, on suppose que G est d'ordre fini.

[ULM21] p. 144

Définition 54.
— Une **représentation linéaire** ρ est un morphisme de G dans $\mathrm{GL}(V)$ où V désigne un espace-vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{C}$.
— On dit que n est le **degré** de ρ.
— On dit que ρ est **irréductible** si $V \neq \{0\}$ et si aucun sous-espace vectoriel de V n'est stable par $\rho(g)$ pour tout $g \in G$, hormis $\{0\}$ et V.

Exemple 55. Soit $\varphi : G \to S_n$ le morphisme structurel d'une action de G sur un ensemble de cardinal n. On obtient une représentation de G sur $\mathbb{C}^n = \{e_1, \dots, e_n\}$ en posant

$$\rho(g)(e_i) = e_{\varphi(g)(i)}$$

c'est la représentation par permutations de G associé à l'action. Elle est de degré n.

Définition 56. La représentation par permutations de G associée à l'action par translation à gauche de G sur lui-même est la **représentation régulière** de G, on la note ρ_G.

Définition 57. On peut associer à toute représentation linéaire ρ, son **caractère** $\chi = \mathrm{trace} \circ \rho$. On dit que χ est **irréductible** si ρ est irréductible.

p. 150

Proposition 58. (i) Les caractères sont des fonctions constantes sur les classes de conjugaison.

(ii) Il y a autant de caractères irréductibles que de classes de conjugaisons.

Définition 59. Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation linéaire de G. On suppose $V = W \oplus W_0$ avec W et W_0 stables par $\rho(g)$ pour tout $g \in G$. On dit alors que ρ est **somme directe** de ρ_W et de ρ_{W_0}.

Théorème 60 (Maschke)**.** Toute représentation linéaire de G est somme directe de représentations irréductibles.

[DEV]

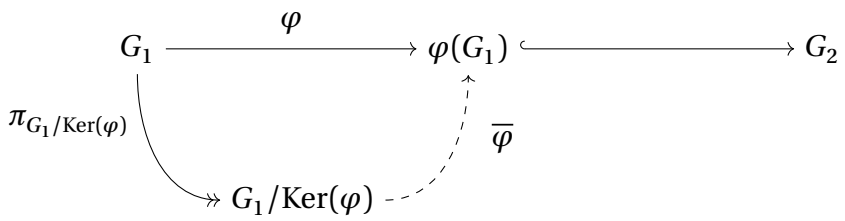
Théorème 61. Les sous-groupes distingués de G sont exactement les

$$\bigcap_{i \in I} \mathrm{Ker}(\rho_i) \text{ où } I \in \mathscr{P}(\llbracket 1, r \rrbracket)$$

[PEY] p. 231

Corollaire 62. G est simple si et seulement si $\forall i \neq 1, \forall g \neq e_G, \chi_i(g) \neq \chi_i(e_G)$.

Annexes



[ULM21] p. 51

FIGURE 1 – Illustration du premier théorème d'isomorphisme par un diagramme.

Bibliographie

Les maths en tête **[GOU21]**

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités*. 3e éd. Ellipses, 13 juill. 2021.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html.

Cours d'algèbre **[PER]**

Daniel PERRIN. *Cours d'algèbre. pour l'agrégation*. Ellipses, 15 fév. 1996.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/7778-18110-cours-d-algebre-agregation-9782729855529.html.

L'algèbre discrète de la transformée de Fourier **[PEY]**

Gabriel PEYRÉ. *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier. Niveau M1*. Ellipses, 15 jan. 2004.
https://adtf-livre.github.io/.

Mathématiques pour l'agrégation **[ROM21]**

Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie*. 2e éd. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.
https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332201-mathematiques-pour-l-agregation-algebre-et-geometrie.

Théorie des groupes **[ULM21]**

Felix ULMER. *Théorie des groupes. Cours et exercices*. 2e éd. Ellipses, 3 août 2021.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13760-25304-theorie-des-groupes-2e-edition-9782340057241.html.