

# 148 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

Soient  $\mathbb{K}$  un corps commutatif.

## I - Espaces vectoriels de dimension finie

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

### 1. Familles génératrices, familles libres

**Définition 1.** Soit  $A \subseteq E$ .

- On dit que  $A$  est une **partie génératrice** de  $E$  si  $E = \text{Vect}(A)$ .
- On dit que  $A$  est une **partie libre** de  $E$  si

$$\forall (a_i)_{i \in I} \subseteq A, \forall (\lambda_i)_{i \in I} \subseteq \mathbb{K}, \sum_{i \in I} \lambda_i a_i = 0 \implies \forall i \in I, \lambda_i = 0$$

(ou de manière équivalente, si aucun vecteur de  $A$  n'est combinaison linéaire des autres).

- On dit que  $A$  est une **partie liée** de  $E$  si  $A$  n'est pas libre.

[GOU21]  
p. 117

**Exemple 2.** Dans le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions réelles continues, les familles suivantes sont libres :

- $(f_\lambda)$  où  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, f_\lambda : x \mapsto e^{\lambda x}$ .
- $(g_\lambda)$  où  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, g_\lambda : x \mapsto \cos(\lambda x)$ .
- $(h_\lambda)$  où  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, h_\lambda : x \mapsto |x - \lambda|$ .

**Proposition 3** (Polynômes à degrés échelonnés). Une famille de polynômes non nuls de  $\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg(P) \leq n\}$  échelonnée en degré est libre dans  $\mathbb{K}_n[X]$ .

[ROM21]  
p. 357

**Application 4** (Théorème des extrema liés). Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et soient  $f, g_1, \dots, g_r : U \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ . On note  $\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$ . Si  $f|_\Gamma$  admet un extremum relatif en  $a \in \Gamma$  et si les formes linéaires  $d(g_1)_a, \dots, d(g_r)_a$  sont linéairement indépendantes, alors il existe des uniques  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  appelés **multiplicateurs de Lagrange** tels que

[GOU20]  
p. 337

$$df_a = \lambda_1 d(g_1)_a + \dots + \lambda_r d(g_r)_a$$

[GOU21]  
p. 117

**Définition 5.** On dit que  $E$  est de **dimension finie** s'il existe une partie génératrice finie de  $E$ . Dans le cas contraire,  $E$  est dit de **dimension infinie**.

## 2. Bases

**Définition 6.** Une partie libre et génératrice de  $E$  est une **base** de  $E$ .

[GOU21]  
p. 117

**Exemple 7.** — La famille  $(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  (où  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , le 1 se trouvant à la  $i$ -ième position) est une base de  $\mathbb{K}^n$  appelée **base canonique** de  $\mathbb{K}^n$ .

— La famille  $(X^i)_{i \in \mathbb{N}}$  est une base de  $\mathbb{K}[X]$  appelée **base canonique** de  $\mathbb{K}[X]$ .

**Proposition 8.** Plus généralement, toute famille de polynômes non nuls de  $\mathbb{K}_n[X]$  échelonnée en degré est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

[ROM21]  
p. 257

**Proposition 9.** Soit  $B = (e_i)_{i \in I}$  une base de  $E$ . Alors, tout vecteur  $x$  de  $E$  s'écrit de manière unique  $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$  avec  $\forall i \in I, x_i \in \mathbb{K}$ . Les  $x_i$  sont les **coordonnées** de  $x$  dans la base  $B$ .

[GOU21]  
p. 117

**Théorème 10.** On suppose  $E$  de dimension finie. Alors pour toute partie génératrice  $\mathcal{G} \subseteq E$  et toute famille libre  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{G}$ , il existe une base  $B$  de  $E$  telle que  $\mathcal{L} \subseteq B \subseteq \mathcal{G}$ .

**Corollaire 11.** On suppose  $E$  de dimension finie.

- Il existe une base de  $E$ .
- (Théorème de la base extraite) De toute partie génératrice de  $E$ , on peut extraire une base de  $E$ .
- (Théorème de la base incomplète) Toute partie libre de  $E$  peut-être complétée en une base de  $E$ .

## 3. Théorie de la dimension

**Théorème 12.** On suppose  $E$  de dimension finie. Toutes les bases de  $E$  ont le même cardinal  $n$ . L'entier  $n$  s'appelle **dimension** de  $E$ , noté  $\dim_{\mathbb{K}}(E)$  (ou simplement  $\dim(E)$  en l'absence d'ambiguïté sur le corps de base).

Dans toute la suite de la section, on se limitera au cas où  $E$  est de dimension finie, et notera  $n = \dim(E)$ .

**Proposition 13.** — Tout système libre de  $n$  vecteurs de  $E$  est une base de  $E$ .  
— Tout système générateur de  $n$  vecteurs de  $E$  est une base de  $E$ .

**Proposition 14.** Soient  $E_1, \dots, E_k$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ . Alors,

$$E = E_1 \oplus \dots \oplus E_k \iff E = E_1 + \dots + E_k \text{ et } n = \sum_{i=1}^k \dim(E_i)$$

**Proposition 15** (Formule de Grassmann). Soient  $E_1$  et  $E_2$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Alors,

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2)$$

**Corollaire 16.** Soient  $E_1$  et  $E_2$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $E = E_1 \oplus E_2$ .
- (ii)  $\dim(E) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$  et  $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ .
- (iii)  $\dim(E) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$  et  $E = E_1 + E_2$ .

**Exemple 17.**

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$$

p. 240

## II - Rang

### 1. Rang d'une application linéaire

**Définition 18.** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Si  $\text{Im}(f)$  est de dimension finie, on appelle **rang** de  $f$  l'entier  $\dim(\text{Im}(f))$ , noté  $\text{rang}(f)$ .

p. 120

**Théorème 19** (Théorème du rang). Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$  avec  $E$  de dimension finie. Alors,

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rang}(f)$$

**Corollaire 20.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  où  $E$  et  $F$  sont de même dimension finie. Alors :

$$f \text{ bijective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ surjective}$$

**Contre-exemple 21.** L'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[X] &\rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\mapsto P' \end{aligned}$$

est linéaire surjective, mais pas injective.

**Application 22.** L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}) \\ A &\mapsto (X \mapsto \text{trace}(AX)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

p. 138

## 2. Rang d'une matrice

**Définition 23.** Soit  $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ . On appelle **rang** de  $A$  la dimension du sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^q$  engendré par les colonnes de  $A$ . Si  $A$  est la matrice d'une application linéaire  $f$ , on a  $\text{rang}(A) = \text{rang}(f)$ .

p. 128

*Remarque 24.* Soit  $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ .

- $\text{rang}(A) \leq \min(p, q)$ .
- Si  $p = q$ ,  $A$  est inversible si et seulement si  $\text{rang}(A) = p$ .

**Théorème 25.** Soit  $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ . Si  $A$  est de rang  $r \geq 1$ , alors  $A$  est équivalente à

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & O \end{pmatrix}$$

**Corollaire 26.** Deux matrices  $A$  et  $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$  sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

**Théorème 27.** Le rang d'une matrice est le plus grand des ordres des matrices carrées inversibles extraites de cette matrice.

**Corollaire 28.** Le rang de toute matrice est égal au rang de sa transposée.

*Remarque 29.* Autrement dit, la dimension du sous-espace engendré par les vecteurs colonnes d'une matrice est égal à la dimension du sous-espace engendré par ses vecteurs lignes.

**Proposition 30.** On ne change pas le rang d'une matrice par opérations élémentaires.

**Exemple 31.** On peut utiliser l'algorithme du pivot de Gauss pour trouver le rang d'une matrice. Ainsi,

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

### III - Applications

#### 1. Dualité

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  de dimension finie  $n$ .

**Définition 32.** L'ensemble  $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  est appelé **dual** de  $E$ . Ses éléments sont les **formes linéaires** sur  $E$ .

**Définition 33.** Soit  $B = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on définit

$$e_i^* : e_j \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

la **forme linéaire coordonnée** d'indice  $i$ .

**Théorème 34.**  $B^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$  est une base de  $E^*$  appelée **base duale** de  $B$ .  $B$  est alors la **base antéduale** de  $B^*$ .

**Corollaire 35.** —  $E^*$  est de dimension finie et  $\dim(E^*) = n$ .

$$\text{— } \forall \varphi \in E^*, \varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^*.$$

**Application 36** (Formule de Taylor). On suppose  $\mathbb{K}$  de caractéristique nulle. Pour tout  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on définit :

$$e_j : \begin{array}{l} \mathbb{K}_n[X] \rightarrow \mathbb{K} \\ P \rightarrow \frac{P^{(j)}(0)}{j!} \end{array}$$

Alors,  $(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  est une base de  $K_n[X]^*$ , dont la base antéduale est  $(X^i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ .

## 2. Classification des formes quadratiques

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  de dimension  $n$ .

[GOU21]  
p. 239

**Définition 37.** Soit  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  une application.

- $\varphi$  est une **forme bilinéaire** sur  $E$  si  $\forall x \in E$ ,  $\varphi(x, \cdot)$  est linéaire et de même pour  $\varphi(\cdot, y)$ ,  $\forall y \in E$ . Si  $B = (e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  est une base de  $E$ , on définit la matrice  $M$  de  $\varphi$  dans  $B$  par  $M = (\varphi(e_i, e_j))_{i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ .
- Si de plus  $\forall x, y \in E$ ,  $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ , on dit que  $\varphi$  est **symétrique**.

**Définition 38.** On appelle **forme quadratique** sur  $E$  toute application  $q$  de la forme

$$q : \begin{array}{l} E \rightarrow \mathbb{K} \\ x \mapsto \varphi(x, x) \end{array}$$

où  $\varphi$  est une forme bilinéaire symétrique sur  $E$ .

**Proposition 39.** Soit  $q$  une forme quadratique sur  $E$ . Il existe une unique forme bilinéaire symétrique  $\varphi$  telle que pour tout  $x \in E$ ,  $q(x) = \varphi(x, x)$ .

$\varphi$  est alors la **forme polaire** de  $q$ , et on a

$$\forall x, y \in E, \varphi(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$$

**Définition 40.** Soit  $q$  une forme quadratique sur  $E$ . On appelle **rang** de  $q$  (noté  $\text{rang}(q)$ ) le rang de la matrice de sa forme polaire.

**Lemme 41.** Soit  $\Phi$  une forme quadratique sur  $E$ . Il existe une base  $\Phi$ -orthogonale (ie. si  $\varphi$  est la forme polaire de  $\Phi$ , une base  $B$  où  $\forall e, e' \in B$ ,  $\varphi(e, e') = 0$  si  $e \neq e'$ ).

**Théorème 42** (Loi d'inertie de Sylvester). Soit  $\Phi$  une forme quadratique sur  $E$ .

$$\exists p, q \in \mathbb{N} \text{ et } \exists f_1, \dots, f_{p+q} \in E^* \text{ tels que } \Phi = \sum_{i=1}^p |f_i|^2 - \sum_{i=p+1}^q |f_i|^2$$

où les formes linéaires  $f_i$  sont linéairement indépendantes et où  $p + q \leq n$ . De plus, ces entiers ne dépendent que de  $\Phi$  et pas de la décomposition choisie.

Le couple  $(p, q)$  est la **signature** de  $\Phi$  et le rang  $\Phi$  est égal à  $p + q$ .

[DEV]

**Exemple 43.** La signature de la forme quadratique  $\Phi : (x, y, z) \mapsto x^2 - 2y^2 + xz + yz$  est  $(2, 1)$ , donc son rang est 3.

### 3. Extensions de corps

**Définition 44.** On appelle **extension** de  $\mathbb{K}$  tout corps  $\mathbb{L}$  tel qu'il existe un morphisme de corps de  $\mathbb{K}$  dans  $\mathbb{L}$ . On notera  $\mathbb{L}/\mathbb{K}$  pour signifier que  $\mathbb{L}$  est une extension de  $\mathbb{K}$  par la suite.

[GOZ]  
p. 21

**Définition 45.** Soit  $\mathbb{L}/\mathbb{K}$  une extension de  $\mathbb{K}$ . On appelle **degré** de  $\mathbb{L}/\mathbb{K}$  et on note  $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$ , la dimension de  $\mathbb{L}$  comme  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**Théorème 46** (Base télescopique). Soient  $\mathbb{L}/\mathbb{K}$  une extension de  $\mathbb{K}$  et  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{L}$ . Soient  $(e_i)_{i \in I}$  une base de  $E$  en tant que  $\mathbb{L}$ -espace vectoriel et  $(\alpha_j)_{j \in J}$  une base de  $\mathbb{L}$  en tant que  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Alors  $(\alpha_j e_i)_{(i,j) \in I \times J}$  est une base de  $E$  en tant que  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**Corollaire 47** (Multiplicativité des degrés). Soient  $\mathbb{L}/\mathbb{K}$  une extension de  $\mathbb{K}$  et  $\mathbb{M}/\mathbb{L}$  une extension de  $\mathbb{L}$ . Alors, sont équivalentes :

- (i)  $\mathbb{M}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.
- (ii)  $\mathbb{M}$  est un  $\mathbb{L}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $\mathbb{L}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

On a alors :

$$\dim_{\mathbb{K}}(M) = \dim_{\mathbb{L}}(M) \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{L}) \iff [\mathbb{M} : \mathbb{K}] = [\mathbb{M} : \mathbb{L}][\mathbb{L} : \mathbb{K}]$$

**Exemple 48.**

$$[\mathbb{Q}[i + \sqrt{2}] : \mathbb{Q}] = 4$$

p. 46

### 4. Commutant

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**Lemme 49.** Si  $\pi_A = \chi_A$ , alors  $A$  est cyclique :

$$\exists x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \text{ tel que } (x, Ax, \dots, A^{n-1}x) \text{ est une base de } \mathbb{K}^n$$

[GOU21]  
p. 289

[FGN2]  
p. 160

**Notation 50.** — On note  $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices carrées triangulaires supérieures d'ordre  $n$  à coefficients dans le corps  $\mathbb{K}$ .  
— On note  $\mathcal{C}(A)$  le commutant de  $A$ .

**Lemme 51.**

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}(A)) \geq n$$

**Lemme 52.** Le rang de  $A$  est invariant par extension de corps.

**Théorème 53.**

$$\mathbb{K}[A] = \mathcal{C}(A) \iff \pi_A = \chi_A$$

[DEV]



# Bibliographie

## **Oraux X-ENS Mathématiques**

[FGN2]

Serge FRANCINO, Hervé GIANELLA et Serge NICOLAS. *Oraux X-ENS Mathématiques. Volume 2*. 2<sup>e</sup> éd. Cassini, 16 mars 2021.

<https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/111-oraux-x-ens-mathematiques-nouvelle-serie-vol-2.html>.

## **Les maths en tête**

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.

## **Les maths en tête**

[GOU21]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 13 juill. 2021.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html>.

## **Théorie de Galois**

[GOZ]

Ivan GOZARD. *Théorie de Galois. Niveau L3-M1*. 2<sup>e</sup> éd. Ellipses, 1<sup>er</sup> avr. 2009.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/4897-15223-theorie-de-galois-niveau-l3-m1-2e-edition-9782729842772.html>.

## **Mathématiques pour l'agrégation**

[ROM21]

Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie*. 2<sup>e</sup> éd. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332201-mathematiques-pour-l-aregation-algebre-et-geometrie>.