149 Déterminant. Exemples et applications.

Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif et E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{K}$.

I - Généralités

1. Formes n-linéaires alternées et déterminant

Définition 1. Soient $E_1, \dots, E_p$ et F des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et $f : E_1, \dots, E_p \to F$. [GOU21] p. 140

— f est dite p-**linéaire** si en tout point les p applications partielles sont linéaires.

— Si f est p-linéaire et si $E_1 = \dots = E_p$ ainsi que $F = \mathbb{K}$, f est une **forme** p-**linéaire**. On note $\mathscr{L}_p(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des formes p-linéaires sur E.

— Si de plus $f(x_1, \dots, x_p) = 0$ dès que deux vecteurs parmi les x_i sont égaux, alors f est dite **alternée**.

Exemple 2. En reprenant les notations précédentes, pour $p = 2$, f est bilinéaire.

Proposition 3. $\mathscr{L}_p(E, \mathbb{K})$ est un espace vectoriel et, $\dim(\mathscr{L}_p(E, \mathbb{K})) = |\dim(E)|^p$.

Théorème 4. L'ensemble des formes p-linéaires alternées sur E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1. De plus, il existe une unique forme p-linéaire alternée f prenant la valeur 1 sur une base $\mathscr{B}$ de E. On note $f = \det_{\mathscr{B}}$.

Définition 5. $\det_{\mathscr{B}}$ est l'application **déterminant** dans la base $\mathscr{B}$. En l'absence d'ambiguïté, on s'autorise à noter $\det = \det_{\mathscr{B}}$.

Proposition 6. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Si $x_1, \dots, x_n \in E$ ($\forall i \in [\![1, n]\!]$, on peut écrire $x_i = \sum_{j=1}^n x_{i,j} e_j$), on a la formule $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n x_{i,\sigma(i)}$.

Proposition 7. Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Si $\mathscr{B}'$ est une autre base de E, alors $\det_{\mathscr{B}'} = \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \det_{\mathscr{B}}$.

Théorème 8. Une famille de vecteurs est liée si et seulement si son déterminant est nul dans une base quelconque de E.

2. Déterminant d'un endomorphisme

Lemme 9. Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Le scalaire $\det_{\mathscr{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ considérée.

Définition 10. Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On appelle **déterminant** de f le scalaire $\det_{\mathscr{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$. On le note $\det(f)$.

Proposition 11. Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$.

(i) $\det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)$.

(ii) $\det(\mathrm{id}_e) = 1$.

(iii) $f \in \mathrm{GL}(E) \iff \det(f) \neq 0$. Dans ce cas, on a $\det(f^{-1}) = \det(f)^{-1}$.

3. Déterminant d'une matrice carrée

Définition 12. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **déterminant** de A, le déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On le note $\det(A)$.

Notation 13. Si $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note son déterminant sous la forme

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Exemple 14. [GRI] p. 104

— $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

— $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 39.$

Proposition 15. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. [GOU21] p. 142

(i) $\det(A) = \det({}^tA)$.

(ii) $\det(A)$ dépend linéairement des colonnes (resp. des lignes) de A.

(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

(iv) $\det(A) \neq 0 \iff A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

(v) Si A est la matrice de $f \in \mathscr{L}(E)$ dans une base, alors $\det(f) = \det(A)$.

(vi) Si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(vii) Deux matrices semblables ont le même déterminant.

II - Méthodes de calcul

1. Propriétés

Proposition 16. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) Si on effectue une permutation $\sigma \in S_n$ sur les colonnes ou les lignes de A, le déterminant est multiplié par $\epsilon(\sigma)$ (la signature de σ).

(ii) Si A est triangulaire, $\det(A)$ est le produit des éléments diagonaux de A.

(iii) On ne change pas la valeur d'un déterminant en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes. Même chose sur les lignes.

Exemple 17.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & m+1 \end{vmatrix} = -2(m+1)$$

Proposition 18 (Déterminant par blocs)**.** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire par blocs, de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

alors $\det(M) = \det(A)\det(B)$.

2. Mineurs et cofacteurs

Définition 19. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

— Pour tout $i, j \in [\![1,n]\!]$, on appelle **mineur** de l'élément $a_{i,j}$ le déterminant $\Delta_{i,j}$ de la matrice obtenue en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne de A.

— Le scalaire $A_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$ s'appelle le **cofacteur** de $a_{i,j}$.

— On appelle **mineurs principaux** de A les déterminants $\Delta_k = \det((a_{i,j})_{i,j \in [\![1,k]\!]})$ pour $k \in [\![1,n]\!]$.

Proposition 20. En reprenant les notations précédentes :

(i) Soit $j \in [\![1,n]\!]$. On a $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}A_{i,j}$ (développement par rapport à la j-ième colonne).

(ii) Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On a $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} A_{i,j}$ (développement par rapport à la i-ième ligne).

Exemple 21. [GRI] p. 118

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6(6-14) = -48$$

Définition 22. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice $(A_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]}$ des cofacteurs des éléments de A est appelée **comatrice** de A, et on la note $\mathrm{com}(A)$. [GOU21] p. 143

Proposition 23. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a :

$$A^t \mathrm{com}(A) = {}^t \mathrm{com}(A) A = \det(A) I_n$$

Corollaire 24. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t \mathrm{com}(A)$$

Exemple 25. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$. Alors,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3. Exemples classiques

Exemple 26 (Déterminant de Vandermonde)**.** Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. Alors

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

Exemple 27 (Déterminant de Cauchy)**.** Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$ tels que pour tout p. 150

$i, j \in [\![1, n]\!]$, $a_i + b_j \neq 0$. Alors

$$\det\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right) = \frac{\prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j - a_i)\prod_{1\leq i<j\leq n}(b_j - b_i)}{\prod_{i,j=1}^{n}(a_i + b_j)}$$

Exemple 28 (Déterminant circulant)**.** Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Alors p. 153

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} P(\omega^j)$$

où $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

III - Applications

1. Systèmes d'équations linéaires

On cherche à résoudre un système d'équations linéaires de la forme p. 143

$$AX = B \tag{S}$$

avec $A = (a_{i,j})_{\substack{i\in[\![1,p]\!] \\ j\in[\![1,q]\!]}}$ et $B = (b_i)_{i\in[\![1,p]\!]} \in \mathbb{K}^p$.

Théorème 29 (Formules de Cramer)**.** On se place dans le cas $p = q = n$. Alors, (S) admet une unique solution si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Dans ce cas, elle est donnée par $X = (x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ où

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

avec A_i obtenue en remplaçant la i-ième colonne de A par B.

Lemme 30. Soit $r = \operatorname{rang}(A)$. Il existe un déterminant Δ d'ordre r extrait de A.

Définition 31. — Le déterminant Δ précédent est le **déterminant principal** de A.

- — Les équations (resp. inconnues) dont les indices sont deux des lignes (resp. colonnes) de Δ s'appellent les **équations principales** (resp. **inconnues principales**).
- — Si $\Delta = \det(a_{i,j})_{\substack{i\in I \\ j\in J}}$, on appelle **déterminants caractéristiques** les déterminants d'ordre $r+1$ de la forme

$$\left|\begin{array}{c|c} (a_{i,j})_{\substack{i\in I \\ j\in J}} & (b_i)_{i\in I} \\ \hline (a_{k,j})_{j\in J} & b_k \end{array}\right| \text{avec } k \notin J.$$

Théorème 32 (Rouché-Fontené)**.** Le système (S) admet des solutions si et seulement si $p = r$ ou les $p - r$ déterminants caractéristiques sont nuls. Le système est alors équivalent au système des équations principales. Les inconnues principales étant déterminées par un système de Cramer à l'aide des inconnues non principales.

Exemple 33. Si,

$$(S) \iff \begin{cases} x + 2y + z + t = 1 \\ x - z - t = 1 \\ -x + y + z + 2t = m \end{cases} \qquad m \in \mathbb{R}$$

on a $\operatorname{rang}(A) = 2$, (S) admet des solutions si et seulement si $m = -1$, et

$$(S) \iff \begin{cases} x + 2y = 1 + z - t \\ x = 1 + z + t \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 + z + t \\ y = -t \end{cases}$$

2. En géométrie

a. Volume d'un parallélépipède

Théorème 34. L'aire $\mathscr{A}(v, w)$ du parallélogramme engendré par deux vecteurs $v, w \in \mathbb{R}^n$ est égale à **[GRI]** p. 130

$$\mathscr{A}(v, w) = |\det(v, w)|$$

Corollaire 35. Soient $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. On note $\mathscr{V}(v_1, \dots, v_n)$ le volume du parallélépipède rectangle engendré par $v_1, \dots, v_n$ (ie. l'ensemble $\{z \in \mathbb{R}^n \mid z = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i,\ \lambda_i \in [0,1]\}$). On a alors :

$$\mathscr{V}(v_1, \dots, v_n) = |\det(v_1, \dots, v_n)|$$

b. Suite de polygones

Théorème 36 (Suite de polygones)**.** Soit P_0 un polygone dont les sommets sont $\{z_{0,1}, \dots, z_{0,n}\}$. On définit la suite de polygones (P_k) par récurrence en disant que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les sommets de P_{k+1} sont les milieux des arêtes de P_k. **[I-P]** p. 389

Alors la suite (P_k) converge vers l'isobarycentre de P_0.

3. En algèbre linéaire

Définition 37. Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$. On appelle : [GOU21] p. 171

— **Polynôme caractéristique** de A le polynôme $\chi_A = \det(A - XI_n)$.

— **Polynôme minimal** de A l'unique polynôme unitaire π_A qui engendre l'idéal $\mathrm{Ann}(A) = \{Q \in \mathbb{K}[X] \mid Q(A) = 0\}$. p. 186

Proposition 38. p. 172

$$\lambda \text{ est valeur propre de } A \iff \chi_A(\lambda) = 0 \iff \pi_A(\lambda) = 0$$

Proposition 39. p. 185

— A est trigonalisable si et seulement si χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$.

— A est diagonalisable si et seulement si π_A est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$.

Remarque 40. Si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$, A est diagonalisable si et seulement si $A^q = A$.

Théorème 41 (Cayley-Hamilton)**.**

$$\pi_u \mid \chi_u$$

4. À l'étude du groupe linéaire

Théorème 42. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes : [ROM21] p. 140

(i) $u \in \mathrm{GL}(E)$.

(ii) $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$.

(iii) $\mathrm{Im}(u) = E$.

(iv) $\mathrm{rang}(u) = n$.

(v) $\det(u) = 0$.

(vi) u transforme toute base de E en une base de E.

(vii) Il existe $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u \circ v = \mathrm{id}_E$.

(viii) Il existe $w \in \mathscr{L}(E)$ tel que $w \circ u = \mathrm{id}_E$.

Proposition 43. $\det : \mathrm{GL}(E) \to \mathbb{K}^*$ est un morphisme surjectif. [PER] p. 95

Soit p un nombre premier ≥ 3. On se place sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p$.

[I-P] p. 203

Définition 44. Soit H un hyperplan de E et G un supplémentaire de H. On définit f la **dilatation** de base H, de direction G et de rapport $\lambda \in \mathbb{K}^*$ par

$$\forall x \in H, \forall y \in G, f(x+y) = x + \lambda y$$

Théorème 45. Si $|\mathbb{K}| \geq 3$, les dilatations engendre $\mathrm{GL}(E)$.

Notation 46. Soit $a \in \mathbb{F}_p$. On note $\left(\frac{a}{p}\right)$ le symbole de Legendre de a modulo p.

Lemme 47. $a \mapsto \left(\frac{a}{p}\right)$ est un morphisme de groupes.

Lemme 48. Il y a $\frac{p-1}{2}$ résidus quadratiques dans $\mathbb{F}_p^*$.

Théorème 49. Le groupe multiplicatif d'un corps fini est cyclique.

Théorème 50 (Frobenius-Zolotarev)**.**

$$\forall u \in \mathrm{GL}(E), \epsilon(u) = \left(\frac{\det(u)}{p}\right)$$

où u est vu comme une permutation des éléments de E.

Annexes

[I-P]
p. 389

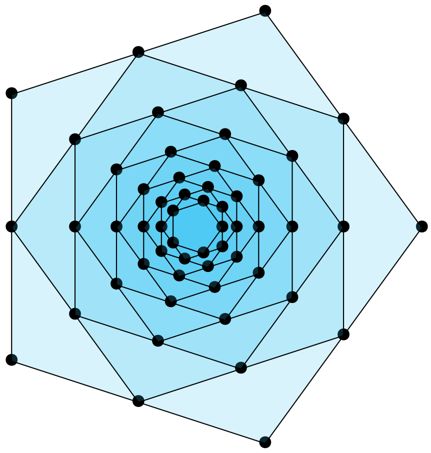

Figure 1 – La suite de polygones.

Bibliographie

Les maths en tête **[GOU21]**

Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités.* 3e éd. Ellipses, 13 juill. 2021. https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html.

Algèbre Linéaire **[GRI]**

Joseph Grifone. *Algèbre Linéaire.* 6e éd. Cépaduès, 9 jan. 2019. https://www.cepadues.com/livres/algebre-lineaire-edition-9782364936737.html.

L'oral à l'agrégation de mathématiques **[I-P]**

Lucas Isenmann et Timothée Pecatte. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements.* 2e éd. Ellipses, 26 mars 2024. https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html.

Cours d'algèbre **[PER]**

Daniel Perrin. *Cours d'algèbre. pour l'agrégation.* Ellipses, 15 fév. 1996. https://www.editions-ellipses.fr/accueil/7778-18110-cours-d-algebre-agregation-9782729855529.html.

Mathématiques pour l'agrégation **[ROM21]**

Jean-Étienne Rombaldi. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie.* 2e éd. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021. https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332201-mathematiques-pour-l-agregation-algebre-et-geometrie.