

150 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps commutatif \mathbb{K} . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

I - Polynômes d'endomorphismes

1. L'algèbre $\mathbb{K}[u]$

Notation 1. On note $u^0 = \text{id}_E$ et

$$u^k = \underbrace{u \circ \dots \circ u}_{k \text{ fois}}$$

[ROM21]
p. 603

Définition 2. À tout polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ on fait correspondre l'endomorphisme $P(u) = \sum_{k=0}^n a_k u^k$.

Proposition 3. L'ensemble,

$$\mathbb{K}[u] = \{P(u) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$$

est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$, de dimension inférieure ou égale à n^2 .

Remarque 4. Au vu de l'isomorphisme entre $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit de même $\mathbb{K}[A]$ pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est la matrice de u dans une base de E , alors pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A)$ est la matrice de $P(u)$ dans cette même base. Toutes les propriétés énoncées pour les endomorphismes sont vraies pour les matrices, et réciproquement.

Proposition 5. Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire de la forme

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & \dots & * \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

[GOU21]
p. 184

et $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors, $P(M)$ est de la forme

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(\alpha_1) & * & \dots & * \\ 0 & P(\alpha_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & P(\alpha_n) \end{pmatrix}$$

2. Polynôme caractéristique de u

Définition 6. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On dit que λ est **valeur propre** de u si $E_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$ n'est pas réduit à $\{0\}$.
- Un vecteur $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$ est un **vecteur propre** de u associé à la valeur propre λ .
- E_λ est le **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ .
- L'ensemble des valeurs propres de u est appelé **spectre** de u . On le note $\text{Sp}(u)$.

[ROM21]
p. 643

Proposition 7. En notant $\chi_u = \det(X \text{id}_E - u)$,

$$\text{Sp}(u) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \chi_u(\lambda) = 0\}$$

Théorème 8. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Pour toute valeur propre λ de u (voir Définition 6), $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$. Si le corps \mathbb{K} est algébriquement clos, on a alors

$$\text{Sp}(P(u)) = \{P(\lambda) \mid \lambda \in \text{Sp}(u)\}$$

p. 604

Contre-exemple 9. Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $P = X^2$, on a $A^2 = -I_2$ et $\text{Sp}(A) = \emptyset$.

Définition 10. Le polynôme χ_u précédent est appelé **polynôme caractéristique** de u .

p. 644

Remarque 11. On peut définir de la même manière les mêmes notions pour une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (une valeur est propre pour une matrice si et seulement si elle l'est pour l'endomorphisme associé). On reprendra les mêmes notations.

Exemple 12. Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on a $\chi_A = X^2 - \text{trace}(A)X + \det(A)$.

Proposition 13. Soit λ une valeur propre de u de multiplicité α en tant que racine de χ_u . Alors,

$$\dim(E_\lambda) \in \llbracket 1, \alpha \rrbracket$$

Proposition 14. (i) Le polynôme caractéristique est un invariant de similitude.

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\chi_A = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Alors, $a_0 = \det(A)$ et $a_{n-1} = \text{trace}(A)$ (à un signe près).

[GOU21]
p. 172

3. Polynôme minimal de u

Lemme 15. (i) $\text{Ann}(u) = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{K}[u]$ non réduit au polynôme nul.

(ii) $\text{Ann}(u)$ est le noyau de $P \mapsto P(u)$: c'est un idéal de $\mathbb{K}[u]$.

(iii) Il existe un unique polynôme unitaire engendrant cet idéal.

[ROM21]
p. 604

Définition 16. On appelle **idéal annulateur** de u l'idéal $\text{Ann}(u)$. Le polynôme unitaire générateur est noté π_u et est appelé **polynôme minimal** de u .

Remarque 17. — π_u est le polynôme unitaire de plus petit degré annulant u .

— Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice de u dans une base de E , on a $\text{Ann}(u) = \text{Ann}(A)$ et $\pi_u = \pi_A$.

Exemple 18. Un endomorphisme est nilpotent d'indice q si et seulement si son polynôme minimal est X^q .

Proposition 19. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u . Alors, le polynôme minimal de l'endomorphisme $u|_F : F \rightarrow F$ divise π_u .

Proposition 20. (i) Les valeurs propres de u sont racines de tout polynôme annulateur.

(ii) Les valeurs propres de u sont exactement les racines de π_u .

Remarque 21. π_u et χ_u partagent donc les mêmes racines.

[GOU21]
p. 186

Théorème 22. $P \mapsto P(u)$ induit un isomorphisme :

$$\mathbb{K}[X]/(\pi_u) \cong \mathbb{K}[u]$$

[ROM21]
p. 606

Corollaire 23. L'espace vectoriel $\mathbb{K}[u]$ est de dimension égale à $p_u = \deg(\pi_u)$, une base étant donnée par $(u^k)_{k \in \llbracket 1, p_u \rrbracket}$.

Corollaire 24.

$$\mathbb{K}[u] \text{ est un corps} \iff \mathbb{K}[u] \text{ est int\grave{e}gre} \iff \mathbb{K}[u] \text{ est irr\^{e}ductible}$$

Théorème 25 (Cayley-Hamilton).

$$\pi_u \mid \chi_u$$

Corollaire 26.

$$\dim(\mathbb{K}[u]) \leq n$$

Corollaire 27. Si u est inversible,

$$u^{-1} = -\frac{1}{\det(u)} \sum_{k=1}^n a_k u^{k-1}$$

En particulier, $u^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.

Corollaire 28. u est nilpotent si et seulement si $\chi_u = X^n$.

II - Réduction d'endomorphismes

1. Diagonalisation

Définition 29. — On dit que u est **diagonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

— On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale.

p. 683

Remarque 30. u est diagonalisable si et seulement si sa matrice dans n'importe quelle base de E l'est.

Exemple 31. — Les projecteurs (ie. les endomorphismes $p \in \mathcal{L}(E)$ tels que $p^2 = p$) sont toujours diagonalisables, à valeurs propres dans $\{0, 1\}$.

— Les symétries (ie. les endomorphismes $s \in \mathcal{L}(E)$ tels que $s^2 = \text{id}_E$) sont toujours diagonalisables, à valeurs propres dans $\{\pm 1\}$. Par exemple, l'endomorphisme de trans-

[BMP]
p. 166

position $A \mapsto {}^t A$ est diagonalisable.

Proposition 32. Si u a n valeurs propres distinctes dans \mathbb{K} , alors il est diagonalisable.

[ROM21]
p. 683

Théorème 33 (Lemme des noyaux). Soit $P = P_1 \dots P_k \in \mathbb{K}[X]$ où les polynômes P_1, \dots, P_k sont premiers entre eux deux à deux. Alors,

[DEV]
p. 609

$$\text{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^k \text{Ker}(P_i(u))$$

Théorème 34. Soit $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

p. 683

- (i) u est diagonalisable sur \mathbb{K} .
- (ii) $E = \bigoplus_{k=1}^p E_{\lambda_k}$.
- (iii) $\sum_{k=1}^p \dim(E_{\lambda_k}) = n$.
- (iv) χ_n est scindé sur \mathbb{K} et pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la dimension de E_{λ_k} est égale à la multiplicité de λ_k dans χ_u .
- (v) $\exists P \in \text{Ann}(u)$ scindé à racines simples.
- (vi) π_u est scindé à racines simples.

Exemple 35. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

[GOU21]
p. 177

Théorème 36 (Diagonalisation simultanée). Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes de E diagonalisables. Il existe une base commune de diagonalisation dans E pour $(u_i)_{i \in I}$ si et seulement si ces endomorphismes commutent deux-à-deux.

[ROM21]
p. 684

Théorème 37 (Spectral). Tout endomorphisme symétrique se diagonalise dans une base orthonormée.

p. 734

2. Trigonalisation

Définition 38. — On dit que u est **trigonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

p. 675

— On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **trigonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale.

Remarque 39. u est trigonalisable si et seulement si sa matrice dans n'importe quelle base de E l'est.

Exemple 40. Une matrice à coefficients réels ayant des valeurs propres imaginaires pures n'est pas trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Théorème 41. u est trigonalisable sur \mathbb{K} si et seulement si χ_u est scindé sur \mathbb{K} .

Corollaire 42. Si \mathbb{K} est algébriquement clos, tout endomorphisme de u est trigonalisable sur \mathbb{K} .

Proposition 43. Si u est trigonalisable, sa trace est la somme de ses valeurs propres et son déterminant est le produit de ses valeurs propres.

Théorème 44 (Trigonalisation simultanée). Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes de E diagonalisables qui commutent deux-à-deux. Alors, il existe une base commune de trigonalisation.

3. Décomposition de Dunford

Théorème 45 (Décomposition de Dunford). On suppose que π_u est scindé sur \mathbb{K} . Alors il existe un unique couple d'endomorphismes (d, n) tels que :

- d est diagonalisable et n est nilpotent.
- $u = d + n$.
- $dn = nd$.

Corollaire 46. Si u vérifie les hypothèses précédentes, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k = (d + n)^k = \sum_{i=0}^m \binom{k}{i} d^i n^{k-i}$, avec $m = \min(k, l)$ où l désigne l'indice de nilpotence de n .

Remarque 47. On peut montrer de plus que d et n sont des polynômes en u .

III - Applications

1. Commutant

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

[GOU21]
p. 203

[FGN2]
p. 160

Notation 48. On note $\mathcal{C}(A)$ le commutant de A .

Lemme 49.

$$\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{C}(A)) \geq n$$

Application 50. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathcal{C}(A)$ le commutant de A . Alors,

$$\mathbb{K}[A] = \mathcal{C}(A) \iff \pi_A = \chi_A = \det(XI_n - A)$$

2. Exponentielles de matrices

Lemme 51. (i) La série entière $\sum \frac{z^k}{k!}$ a un rayon de convergence infini.

(ii) $\sum \frac{A^k}{k!}$ est convergente pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

[ROM21]
p. 761

Définition 52. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit l'**exponentielle** de A par

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

on la note aussi $\exp(A)$ ou e^A .

Théorème 53. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- (i) $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est continue.
- (ii) Si A est nilpotente d'indice q , $\exp(A) = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{A^k}{k!}$.
- (iii) $\exp(A) \in \mathbb{K}[A]$. En particulier, $\exp(A)$ commute avec A .
- (iv) Si $A = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, alors $\exp(A) = \text{Diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$.
- (v) Si $B = PAP^{-1}$ pour $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $e^B = P^{-1}e^A P$.
- (vi) $\det(e^A) = e^{\text{trace}(A)}$.
- (vii) $t \mapsto e^{tA}$ est de classe \mathcal{C}^∞ , de dérivée $t \mapsto e^{tA} A$.

Proposition 54. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent. Alors,

$$e^A e^B = e^{A+B} = e^B e^A$$

Corollaire 55. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, e^A est inversible, d'inverse e^{-A} .

Exemple 56. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui admet une décomposition de Dunford $A = D + N$ où D est diagonalisable et N est nilpotente d'indice q . Alors,

$$— e^A = e^D e^N = e^D \sum_{k=0}^{q-1} \frac{N^k}{k!}.$$

— La décomposition de Dunford de e^A est $e^A = e^D + e^D(e^N - I_n)$ avec e^D diagonalisable et $e^D(e^N - I_n)$ nilpotente.

Application 57. Une équation différentielle linéaire homogène $(H) : Y' = AY$ (où A est constante en t) a ses solutions maximales définies sur \mathbb{R} et le problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = y_0 \end{cases}$$

a pour (unique) solution $t \mapsto e^{tA}y_0$.

[GOU20]
p. 380

Lemme 58. Soit $\|\cdot\|$ une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont les valeurs propres sont de partie réelle strictement négative. Alors il existe une fonction polynomiale $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$ tels que $\|e^{tA}\| \leq e^{-\lambda t} P(t)$.

[I-P]
p. 177

Application 59 (Équation de Sylvester). Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices dont les valeurs propres sont de partie réelle strictement négative. Alors pour tout $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'équation $AX + XB = C$ admet une unique solution X dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3. Étude d'une suite de polygones

Lemme 60 (Déterminant circulant). Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Alors

[GOU21]
p. 153

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} P(\omega^j)$$

où $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

Application 61 (Suite de polygones). Soit P_0 un polygone dont les sommets sont $\{z_{0,1}, \dots, z_{0,n}\}$. On définit la suite de polygones (P_k) par récurrence en disant que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les sommets de P_{k+1} sont les milieux des arêtes de P_k .

[I-P]
p. 389

Alors la suite (P_k) converge vers l'isobarycentre de P_0 .

Annexes

[I-P]
p. 389

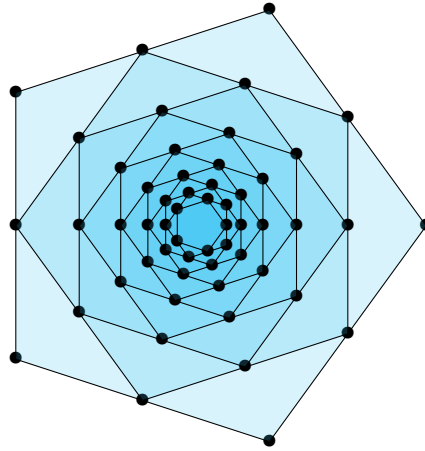


FIGURE 1 – La suite de polygones.

Bibliographie

Objectif agrégation

[BMP]

Vincent BECK, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ. *Objectif agrégation*. 2^e éd. H&K, 22 août 2005.

<https://objectifagregation.github.io>.

Oraux X-ENS Mathématiques

[FGN2]

Serge FRANCINO, Hervé GIANELLA et Serge NICOLAS. *Oraux X-ENS Mathématiques. Volume 2*. 2^e éd. Cassini, 16 mars 2021.

<https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/111-oraux-x-ens-mathematiques-nouvelle-serie-vol-2.html>.

Les maths en tête

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3^e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.

Les maths en tête

[GOU21]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités*. 3^e éd. Ellipses, 13 juill. 2021.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html>.

L'oral à l'agrégation de mathématiques

[I-P]

Lucas ISENMANN et Timothée PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements*. 2^e éd. Ellipses, 26 mars 2024.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html>.

Mathématiques pour l'agrégation

[ROM21]

Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie*. 2^e éd. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332201-mathematiques-pour-l-agregation-algebre-et-geometrie>.