151 Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E.

I - Stabilité

1. Définitions, endomorphismes induits

Définition 1. Soit F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est **stable** par u si $u(F) \subseteq F$. **[BMP]** p. 158

Exemple 2. Le noyau et l'image de u sont stables par u.

Proposition 3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors u admet au moins une droite ou un plan stable.

Proposition 4. Soit F un sous-espace de E stable par u. Alors u induit deux endomorphismes :

— $u_{|F} : F \to F$ la restriction de u à F.

— $\overline{u} : E/F \to E/F$ obtenu par passage au quotient.

Définition 5. Soit A la matrice de l'endomorphisme u dans une base quelconque de E. On définit le **polynôme caractéristique** de u par $\chi_u = \det(XI_n - A)$. p. 163

Proposition 6. Soit F un sous-espace de E stable par u de dimension r. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E telle que les r premiers vecteurs forment une base $\mathcal{B}_F$ de F. Alors : p. 158

(i) La matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

(ii) $\mathcal{B}_{E/F} = \pi_F(\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_F)$ est une base de E/F où $\pi_F : E \to E/F$ désigne la projection canonique sur le quotient.

(iii) $A = \mathrm{Mat}(u_{|F}, \mathcal{B}_F)$ et $B = \mathrm{Mat}(\overline{u}, \mathcal{B}_{E/F})$.

(iv) $\chi_u = \chi_{u_{|F}} \chi_{\overline{u}}$.

2. Sous-espaces stables et polynôme minimal

Proposition 7. Il existe un polynôme qui engendre l'idéal $\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\}$. Il s'agit du **polynôme minimal** de u noté π_u. p. 161

Théorème 8 (Cayley-Hamilton)**.**

$$\pi_u \mid \chi_u$$

Proposition 9. Soit F un sous-espace de E stable par u. Alors $\pi_{|F} \mid \pi_u$.

Proposition 10. Si $E = F_1 \oplus F_2$ avec F_1 et F_2 deux sous-espaces stables par u, alors $\pi_u = \operatorname{ppcm}(\pi_{u_{|F_1}}, \pi_{u_{|F_2}})$.

Proposition 11. Soient P et Q deux polynômes unitaires tels que $\pi_u = PQ$. On note $F = \operatorname{Ker}(P(u))$. Alors $\pi_{u_{|F}} = P$.

3. Recherche de sous-espaces stables

Définition 12. On suppose que le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{K}$: [GOU21] p. 201

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\alpha_i} \text{ où les } \lambda_i \text{ sont distincts deux-à-deux}$$

Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, le sous-espace vectoriel $N_i = \operatorname{Ker}(f - \lambda_i \operatorname{id}_E)^{\alpha_i}$ s'appelle le **sous-espace caractéristique** de f associé à λ_i.

Proposition 13 (Lemme des noyaux)**.** Soient $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux. Alors p. 185

$$\bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}(P_i(u)) = \operatorname{Ker}\left(\left(\prod_{i=1}^{r} P_i\right)(u)\right)$$

Proposition 14. On suppose que le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{K}$. On note $N_1, \dots, N_p$ les sous-espaces caractéristiques de u. p. 202

— $\forall i \in [\![1, p]\!]$, N_i est stable par u.

— $E = N_1 \oplus \dots \oplus N_p$.

— $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\dim N_i = \alpha_i$ où α_i est la multiplicité de λ_i dans χ_u.

[BMP] p. 159

Remarque 15. Plus généralement, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall i \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{id}_E)^i$ est stable par u. C'est en fait un corollaire de la proposition suivante.

Proposition 16. Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $uv = vu$ (pour la composition). Alors le noyau et l'image de v sont stables par u (et réciproquement).

[GOU21] p. 202

Proposition 17. On suppose que le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{K}$.

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\alpha_i} \text{ où les } \lambda_i \text{ sont distincts deux-à-deux}$$

Alors :

(i) π_u est de la forme :

$$\pi_u = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{r_i} \text{ où les } \lambda_i \text{ sont distincts deux-à-deux}$$

(ii) $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $N_i = \operatorname{Ker}(f - \lambda_i \operatorname{id}_E)^{r_i}$.

(iii) $\forall i \in [\![1, p]\!]$, r_i est l'indice de nilpotence de l'endomorphisme $f_{|N_i} - \lambda_i \operatorname{id}_{N_i}$.

4. Utilisation de la dualité

[GOU21] p. 132

Définition 18. On appelle **forme linéaire** de E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ et on note E^* appelé **dual** de E l'ensemble des formes linéaires de E.

Proposition 19. E^* est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n.

Définition 20. Si $A \subset E$, on note $A^\perp = \{\varphi \in E^* \mid \forall x \in A, \varphi(x) = 0\}$ l'**orthogonal** (au sens de la dualité) de A qui est un sous-espace vectoriel de E^*.

Proposition 21. Si F est un sous-espace vectoriel de E, on a $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$.

Définition 22. On définit ${}^t u : E^* \to E^*$ l'**application transposée** de u par

$$\forall \varphi \in E^*, {}^t u(\varphi) = \varphi \circ u$$

Proposition 23. Un sous-espace vectoriel F de E est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par ${}^t u$.

Remarque 24. C'est un résultat qui peut s'avérer utile dans les démonstrations par récurrence s'appuyant sur la dimension d'un sous-espace stable (cf. Théorème 31).

II - Application à la réduction d'endomorphismes

1. Diagonalisation et trigonalisation

p. 171

Définition 25. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est **valeur propre** de u s'il existe $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$. x est alors un **vecteur propre** de u associé à λ. Le sous-espace

$$E_\lambda = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\} = \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id})$$

est le **sous-espace propre** associé à λ.

Définition 26. On dit que u est **diagonalisable** (resp. **trigonalisable**) s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\operatorname{Mat}(u, \mathscr{B})$ soit diagonale (resp. triangulaire supérieure).

[BMP]
p. 165

Théorème 27. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) u est diagonalisable.

(ii) π_u est scindé à racines simples.

(iii) χ_u est scindé et, pour toute valeur propre λ, la dimension du sous-espace propre E_λ est égale à la multiplicité de λ dans χ_u.

(iv) E est somme directe des sous-espaces propres de u.

Exemple 28.
— Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ tel que $p^2 = p$. Alors p est annulé par $X^2 - X$ donc est diagonalisable et à valeurs propres dans $\{0, 1\}$.
— Soit $s \in \mathscr{L}(E)$ tel que $s^2 = \operatorname{id}_E$. Alors si $\operatorname{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, s est annulé par $X^2 - 1$ donc est diagonalisable et à valeurs propres dans $\{\pm 1\}$.

Théorème 29. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) u est trigonalisable.

(ii) π_u est scindé.

(iii) χ_u est scindé.

Exemple 30. Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, tout endomorphisme de E est trigonalisable.

Théorème 31. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes telle que $\forall i,j \in I$, $u_i u_j = u_j u_i$. Si tous les u_i sont trigonalisables (resp. diagonalisables), on peut co-trigonaliser (resp. co-diagonaliser) la famille $(u_i)_{i\in I}$.

Remarque 32. Dans le cas de la diagonalisabilité, cette condition est à la fois nécessaire et suffisante.

Proposition 33. On suppose que u est diagonalisable. Soit F un sous-espace de E stable par u. Alors $u_{|F}$ est diagonalisable. **[GOU21]** p. 174

Application 34. Les assertions suivantes sont équivalentes : **[BMP]** p. 170

(i) u est trigonalisable avec des zéros sur la diagonale.

(ii) u est nilpotent (ie. $\exists m \in \mathbb{N}$ tel que $u^m = 0$).

(iii) $\chi_u = X^n$.

(iv) $\pi_u = X^p$ où p est l'indice de nilpotence de u.

2. Décomposition de Dunford

[DEV] **Théorème 35** (Décomposition de Dunford)**.** On suppose que π_u est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple d'endomorphismes (d,n) tels que : **[GOU21]** p. 203

— d est diagonalisable et n est nilpotent.

— $u = d + n$.

— $dn = nd$.

Corollaire 36. Si u vérifie les hypothèse précédentes, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k = (d+n)^k = \sum_{i=0}^{m} \binom{k}{i} d^i n^{k-i}$, avec $m = \min(k,l)$ où l désigne l'indice de nilpotence de n.

Remarque 37. — Un autre intérêt est le calcul d'exponentielles de matrices.

— On peut montrer de plus que d et n sont des polynômes en u.

3. Réduction de Jordan

Définition 38. Un **bloc de Jordan** de taille m associé à $\lambda \in \mathbb{K}$ désigne la matrice $J_m(\lambda)$ **[BMP]** p. 171

suivante :

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_m(\mathbb{K})$$

Proposition 39. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe une base de E telle que la matrice de u est $J_n(0)$.

(ii) u est nilpotent et cyclique (voir Définition 43).

(iii) u est nilpotent d'indice de nilpotence n.

Théorème 40 (Réduction de Jordan d'un endomorphisme nilpotent)**.** On suppose que u est nilpotent. Alors il existe des entiers $n_1 \geq \dots \geq n_p$ et une base $\mathscr{B}$ de E tels que :

$$\operatorname{Mat}(u, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} J_{n_1}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_p}(0) \end{pmatrix}$$

De plus, on a unicité dans cette décomposition.

Remarque 41. Comme l'indice de nilpotence d'un bloc de Jordan est égal à sa taille, l'indice de nilpotence de u est la plus grande des tailles des blocs de Jordan de la réduite.

[GOU21] p. 209

Théorème 42 (Réduction de Jordan d'un endomorphisme)**.** On suppose que le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{K}$:

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\alpha_i} \text{ où les } \lambda_i \text{ sont distincts deux-à-deux}$$

Alors il existe des entiers $n_1 \geq \dots \geq n_p$ et une base $\mathscr{B}$ de E tels que :

$$\operatorname{Mat}(u, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_p}(\lambda_p) \end{pmatrix}$$

De plus, on a unicité dans cette décomposition.

4. Décomposition de Frobenius

p. 397

Définition 43. On dit que u est **cyclique** s'il existe $x \in E$ tel que $\{P(u)(x) \mid P \in \mathbb{K}[X]\} = E$.

Proposition 44. u est cyclique si et seulement si $\deg(\pi_u) = n$.

Définition 45. Soit $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{K}[X]$. On appelle **matrice compagnon** de P la matrice

$$\mathscr{C}(P) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{p-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix}$$

Proposition 46. u est cyclique si et seulement s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}(u, \mathscr{B}) = \mathscr{C}(\pi_u)$.

Théorème 47. Il existe $F_1, \dots, F_r$ des sous-espaces vectoriels de E tous stables par u tels que :

— $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$.

— $u_i = u_{|F_i}$ est cyclique pour tout i.

— Si $P_i = \pi_{u_i}$, on a $P_{i+1} \mid P_i$ pour tout i.

La famille de polynômes $P_1, \dots, P_r$ ne dépend que de u et non du choix de la décomposition. On l'appelle **suite des invariants de similitude** de u.

Théorème 48 (Réduction de Frobenius)**.** Si $P_1, \dots, P_r$ désigne la suite des invariants de u, alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que :

$$\mathrm{Mat}(u, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} \mathscr{C}(P_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathscr{C}(P_r) \end{pmatrix}$$

On a d'ailleurs $P_1 = \pi_u$ et $P_1 \dots P_r = \chi_u$.

Corollaire 49. Deux endomorphismes de E sont semblables si et seulement s'ils ont la même suite d'invariants de similitude.

Application 50. Toute matrice est semblable à sa transposée.

III - Endomorphismes remarquables

1. Endomorphismes normaux

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie n. On munit E d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$, qui en fait un espace hermitien.

[GRI] p. 286

Notation 51. On note u^* **l'adjoint** de u.

Définition 52. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est dit **normal** s'il est tel que $u \circ u^* = u^* \circ u$.

Proposition 53. On suppose u normal. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de u. Alors :

(i) $E_\lambda^\perp = \{x \in E^\lambda \mid \forall y \in E^\lambda, \langle x, y \rangle = 0\}$ est stable par u.

(ii) $u_{|E_\lambda^\perp}$ est normal.

Corollaire 54. On suppose u normal. Alors u est diagonalisable dans une base orthonormée.

2. Sous-representations

Soit G un groupe d'ordre fini.

[ULM21] p. 144

Définition 55. — Une **représentation linéaire** ρ est un morphisme de G dans $\mathrm{GL}(V)$ où V désigne un espace-vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{C}$.

— On dit que n est le **degré** de ρ.

— On dit que ρ est **irréductible** si $V \neq \{0\}$ et si aucun sous-espace vectoriel de V n'est stable par $\rho(g)$ pour tout $g \in G$, hormis $\{0\}$ et V.

Exemple 56. Soit $\varphi : G \to S_n$ le morphisme structurel d'une action de G sur un ensemble de cardinal n. On obtient une représentation de G sur $\mathbb{C}^n = \{e_1, \dots, e_n\}$ en posant

$$\rho(g)(e_i) = e_{\varphi(g)(i)}$$

c'est la représentation par permutations de G associé à l'action. Elle est de degré n.

Définition 57. La représentation par permutations de G associée à l'action par translation à gauche de G sur lui-même est la **représentation régulière** de G, on la note ρ_G.

Définition 58. Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation linéaire de G. On suppose $V = W \oplus W_0$ avec W et W_0 stables par $\rho(g)$ pour tout $g \in G$. On dit alors que ρ est **somme directe** de ρ_W et de ρ_{W_0}.

[DEV]

Théorème 59 (Maschke)**.** Toute représentation linéaire de G est somme directe de représentations irréductibles.

Annexes

[BMP]
p. 158

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, hook] \arrow[d, "u_{|F}"'] & E \arrow[r, two heads] \arrow[d, "u"'] & E/F \arrow[d, "\overline{u}"'] \\ F \arrow[r, hook] & E \arrow[r, two heads] & E/F \end{tikzcd}$$

FIGURE 1 – Endomorphismes induits par u sur un sous-espace stable F.

p. 157

u	Diagonalisable	Trigonalisable	Quelconque
Décomposition	de E suivant les vecteurs propres	de Dunford	de Frobenius
Sous-espace stable F	espace propre	espace caractéristique	engendré par un élément
$u_{\|F}$	homothétie	homothétie + nilpotent	cyclique

FIGURE 2 – Réduction d'un endomorphisme en fonction de ses propriétés.

Bibliographie

Objectif agrégation **[BMP]**

Vincent Beck, Jérome Malick et Gabriel Peyré. *Objectif agrégation.* 2e éd. H&K, 22 août 2005. `https://objectifagregation.github.io`.

Les maths en tête **[GOU21]**

Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités.* 3e éd. Ellipses, 13 juill. 2021. `https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html`.

Algèbre Linéaire **[GRI]**

Joseph Grifone. *Algèbre Linéaire.* 6e éd. Cépaduès, 9 jan. 2019. `https://www.cepadues.com/livres/algebre-lineaire-edition-9782364936737.html`.

Théorie des groupes **[ULM21]**

Felix Ulmer. *Théorie des groupes. Cours et exercices.* 2e éd. Ellipses, 3 août 2021. `https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13760-25304-theorie-des-groupes-2e-edition-9782340057241.html`.