152 Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ de dimension finie n. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E.

I - Spectre d'un endomorphisme

1. Valeurs propres, vecteurs propres

[GOU21] p. 171

Définition 1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

— On dit que λ est **valeur propre** de u si $u - \lambda \operatorname{id}_E$ est non injective.

— Un vecteur $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$ est un **vecteur propre** de u associé à la valeur propre λ.

— $E_\lambda = \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{id}_E)$ est le **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ.

— L'ensemble des valeurs propres de u est appelé **spectre** de u. On le note $\operatorname{Sp}(u)$.

Remarque 2. — 0 est valeur propre de u si et seulement si $\operatorname{Ker}(f) \neq \{0\}$.

— On peut définir de la même manière les mêmes notions pour une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (une valeur est propre pour une matrice si et seulement si elle l'est pour l'endomorphisme associé). On reprendra les mêmes notations.

— Les sous-espaces E_λ sont stables par u pour toute valeur propre λ.

Exemple 3. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre 1.

Théorème 4. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des valeurs propres de u, distinctes deux à deux. Alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_k}$ sont en somme directe.

[ROM21] p. 604

Théorème 5. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Pour tout valeur propre λ de u, $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$. Si le corps $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, on a alors

$$\operatorname{Sp}(P(u)) = \{P(\lambda) \mid \lambda \in \operatorname{Sp}(u)\}$$

Contre-exemple 6. Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $P = X^2$, on a $A^2 = -I_2$ et $\mathrm{Sp}(A) = \emptyset$.

2. Polynôme caractéristique

Proposition 7. En notant $\chi_u = \det(X \mathrm{id}_E - u)$, p. 644

$$\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \chi_u(\lambda) = 0\}$$

Définition 8. Le polynôme χ_u précédent est appelé **polynôme caractéristique** de u.

Remarque 9. On peut définir la même notion pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ces deux notions coïncidant bien si A est la matrice de u dans une base quelconque de E.

Exemple 10. Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on a $\chi_A = X^2 - \mathrm{trace}(A)X + \det(A)$.

Proposition 11. Soit λ une valeur propre de u de multiplicité α en tant que racine de χ_u. Alors,

$$\dim(E_\lambda) \in [\![1, \alpha]\!]$$

Proposition 12. [GOU21] p. 172
(i) Le polynôme caractéristique est un invariant de similitude.
(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\chi_A = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Alors, $a_0 = \det(A)$ et $a_{n-1} = \mathrm{trace}(A)$ (à un signe près).

3. Polynôme minimal

Lemme 13. [ROM21] p. 604
(i) $\mathrm{Ann}(u) = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{K}[u]$ non réduit au polynôme nul.
(ii) $\mathrm{Ann}(u)$ est le noyau de $P \mapsto P(u)$: c'est un idéal de $\mathbb{K}[u]$.
(iii) Il existe un unique polynôme unitaire engendrant cet idéal.

Définition 14. On appelle **idéal annulateur** de u l'idéal $\mathrm{Ann}(u)$. Le polynôme unitaire générateur est noté π_u et est appelé **polynôme minimal** de u.

Remarque 15. — π_u est le polynôme unitaire de plus petit degré annulant u.
— Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice de u dans une base de E, on a $\mathrm{Ann}(u) = \mathrm{Ann}(A)$ et $\pi_u = \pi_A$.

Exemple 16. Un endomorphisme est nilpotent d'indice q si et seulement si son polynôme minimal est X^q.

Proposition 17. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Alors, le polynôme minimal de l'endomorphisme $u_{|F} : F \to F$ divise π_u.

Proposition 18. (i) Les valeurs propres de u sont racines de tout polynôme annulateur.
(ii) Les valeurs propres de u sont exactement les racines de π_u.

Remarque 19. π_u et χ_u partagent dont les mêmes racines. [GOU21] p. 186

Théorème 20 (Cayley-Hamilton). [ROM21] p. 607

$$\pi_u \mid \chi_u$$

Corollaire 21.

$$\dim(\mathbb{K}[u]) \leq n$$

II - Diagonalisabilité

1. Définition

Définition 22. — On dit que u est **diagonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale. p. 683
— On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale.

Remarque 23. u est diagonalisable si et seulement si sa matrice dans n'importe quelle base de E l'est.

Exemple 24. — Les projecteurs (ie. les endomorphismes $p \in \mathcal{L}(E)$ tels que $p^2 = p$) sont toujours diagonalisables, à valeurs propres dans $\{0, 1\}$. [BMP] p. 166
— Les symétries (ie. les endomorphismes $s \in \mathcal{L}(E)$ tels que $s^2 = \mathrm{id}_E$) sont toujours diagonalisables, à valeurs propres dans $\{\pm 1\}$. Par exemple, l'endomorphisme de trans-

position $A \mapsto {}^t A$ est diagonalisable.

2. Critères

Proposition 25. Si u a n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$, alors il est diagonalisable. **[ROM21]** p. 683

Théorème 26 (Lemme des noyaux)**.** Soit $P = P_1 \dots P_k \in \mathbb{K}[X]$ où les polynômes $P_1, \dots, P_k$ sont premiers entre eux deux à deux. Alors, p. 609

$$\mathrm{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(P_i(u))$$

Théorème 27. Soit $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$. Les assertions suivantes sont équivalentes : p. 683

(i) u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.

(ii) $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}$.

(iii) $\sum_{k=1}^{p} \dim(E_{\lambda_k}) = n$.

(iv) χ_n est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, la dimension de E_{λ_k} est égale à la multiplicité de λ_k dans χ_u.

(v) $\exists P \in \mathrm{Ann}(u)$ scindé à racines simples.

(vi) π_u est scindé à racines simples.

Exemple 28. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. **[GOU21]** p. 177

Corollaire 29. Sur $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$, u est diagonalisable si et seulement si $u^q = u$. p. 188

Théorème 30 (Diagonalisation simultanée)**.** Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes de E diagonalisables. Il existe une base commune de diagonalisation dans E pour $(u_i)_{i \in I}$ si et seulement si ces endomorphismes commutent deux-à-deux. p. 176

Remarque 31. La réciproque est vraie.

3. Exemples d'endomorphismes diagonalisables dans un espace euclidien ou hermitien

On se place dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on munit E d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on munit E d'un produit scalaire hermitien $\langle .,. \rangle$.

a. Endomorphismes autoadjoints

Lemme 32. Il existe un unique $u^* \in \mathscr{L}(E)$ tel que [GOU21] p. 255

$$\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$$

Définition 33. L'endomorphisme u^* précédent est **l'adjoint** de u. On dit que u est **autoadjoint** si $u = u^*$.

Proposition 34. Soit $v \in \mathscr{L}(E)$. Alors $v = u^*$ si et seulement si la matrice de v dans une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E est la transposée (transconjuguée dans le cas hermitien) de la matrice de u dans $\mathscr{B}$.

Théorème 35. Tout endomorphisme autoadjoint se diagonalise dans une base orthonormée, ses valeurs propres étant réelles.

Lemme 36. [C-G] p. 376

$$\forall A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \, \exists! B \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ telle que } B^2 = A$$

[DEV] **Application 37** (Décomposition polaire)**.** L'application

$$\mu : \begin{array}{ccc} \mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \to & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) & \mapsto & OS \end{array}$$

est un homéomorphisme.

b. Endomorphismes normaux

On suppose dans toute cette sous-section que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Définition 38. u est dit **normal** s'il est tel que $u \circ u^* = u^* \circ u$. [GRI] p. 286

Proposition 39. On suppose u normal. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de u. Alors :

(i) $E_\lambda^\perp = \{x \in E^\lambda \mid \forall y \in E^\lambda, \langle x, y \rangle = 0\}$ est stable par u.

(ii) $u_{|E_\lambda^\perp}$ est normal.

Corollaire 40. On suppose u normal. Alors u est diagonalisable dans une base orthonormée.

4. Topologie

Proposition 41. L'ensemble $\mathscr{D}_n(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables à coefficients complexes est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. [BMP] p. 179

Application 42. L'application qui à une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ associe la partie diagonalisable de sa décomposition de Dunford $M = D + N$ n'est pas continue.

Application 43. p. 217

$$\forall U \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \chi_U(U) = 0$$

III - Applications

1. Réduction

[DEV] **Théorème 44** (Décomposition de Dunford)**.** On suppose que π_u est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple d'endomorphismes (d, n) tels que : [GOU21] p. 203

— d est diagonalisable et n est nilpotent.

— $u = d + n$.

— $dn = nd$.

Corollaire 45. Si u vérifie les hypothèse précédentes, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k = (d+n)^k = \sum_{i=0}^m \binom{k}{i} d^i n^{k-i}$, avec $m = \min(k, l)$ où l désigne l'indice de nilpotence de n.

Remarque 46. On peut montrer de plus que d et n sont des polynômes en u.

2. Calcul d'exponentielles

Lemme 47. (i) La série entière $\sum \frac{z^k}{k!}$ a un rayon de convergence infini. [ROM21] p. 761

(ii) $\sum \frac{A^k}{k!}$ est convergente pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 48. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On définit **l'exponentielle** de A par

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

on la note aussi $\exp(A)$ ou e^A.

Théorème 49. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) Si $A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, alors $\exp(A) = \mathrm{Diag}(e_1^\lambda, \dots, e_n^\lambda)$.

(ii) Si $B = PAP^{-1}$ pour $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $e^B = P^{-1} e^A P$.

(iii) $\det(e^A) = e^{\mathrm{trace}(A)}$.

(iv) $t \mapsto e^{tA}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, de dérivée $t \mapsto e^{tA} A$.

Proposition 50. Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent. Alors,

$$e^A e^B = e^{A+B} = e^B e^A$$

Exemple 51. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui admet une décomposition de Dunford $A = D + N$ où D est diagonalisable et N est nilpotente d'indice q. Alors,

— $e^A = e^D e^N = e^D \sum_{k=0}^{q-1} \frac{N^k}{k!}$.

— La décomposition de Dunford de e^A est $e^A = e^D + e^D(e^N - I_n)$ avec e^D diagonalisable et $e^D(e^N - I_n)$ nilpotente.

Application 52. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors A est diagonalisable si et seulement si e^A l'est.

Application 53. Une équation différentielle linéaire homogène $(H) : Y' = AY$ (où A est constante en t) a ses solutions maximales définies sur $\mathbb{R}$ et le problème de Cauchy [GOU20] p. 380

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = y_0 \end{cases}$$

a pour (unique) solution $t \mapsto e^{tA} y_0$.

Bibliographie

Objectif agrégation **[BMP]**

Vincent BECK, Jérome MALICK et Gabriel PEYRÉ. *Objectif agrégation.* 2e éd. H&K, 22 août 2005.
https://objectifagregation.github.io.

Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries **[C-G]**

Philippe CALDERO et Jérôme GERMONI. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome 1.* Calvage & Mounet, 13 mai 2017.
http://www.calvage-et-mounet.fr/2022/05/09/nouvelles-histoires-hedoniste-de-groupes-et-de-geometrie/.

Les maths en tête **[GOU20]**

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse.* 3e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html.

Les maths en tête **[GOU21]**

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités.* 3e éd. Ellipses, 13 juill. 2021.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html.

Algèbre Linéaire **[GRI]**

Joseph GRIFONE. *Algèbre Linéaire.* 6e éd. Cépaduès, 9 jan. 2019.
https://www.cepadues.com/livres/algebre-lineaire-edition-9782364936737.html.

Mathématiques pour l'agrégation **[ROM21]**

Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie.* 2e éd. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.
https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332201-mathematiques-pour-l-agregation-algebre-et-geometrie.