

152 Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Soit E un espace vectoriel sur un corps \mathbb{K} de dimension finie n . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E .

I - Spectre d'un endomorphisme

1. Valeurs propres, vecteurs propres

Définition 1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On dit que λ est **valeur propre** de u si $u - \lambda \text{id}_E$ est non injective.
- Un vecteur $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$ est un **vecteur propre** de u associé à la valeur propre λ .
- $E_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$ est le **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ .
- L'ensemble des valeurs propres de u est appelé **spectre** de u . On le note $\text{Sp}(u)$.

[GOU21]
p. 171

Remarque 2. — 0 est valeur propre de u si et seulement si $\text{Ker}(f) \neq \{0\}$.

- On peut définir de la même manière les mêmes notions pour une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (une valeur est propre pour une matrice si et seulement si elle l'est pour l'endomorphisme associé). On reprendra les mêmes notations.
- Les sous-espaces E_λ sont stables par u pour toute valeur propre λ .

Exemple 3. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre 1.

Théorème 4. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des valeurs propres de u , distinctes deux à deux. Alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_k}$ sont en somme directe.

Théorème 5. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Pour toute valeur propre λ de u , $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$. Si le corps \mathbb{K} est algébriquement clos, on a alors

$$\text{Sp}(P(u)) = \{P(\lambda) \mid \lambda \in \text{Sp}(u)\}$$

[ROM21]
p. 604

Contre-exemple 6. Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $P = X^2$, on a $A^2 = -I_2$ et $\text{Sp}(A) = \emptyset$.

2. Polynôme caractéristique

Proposition 7. En notant $\chi_u = \det(X \text{id}_E - u)$,

$$\text{Sp}(u) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \chi_u(\lambda) = 0\}$$

p. 644

Définition 8. Le polynôme χ_u précédent est appelé **polynôme caractéristique** de u .

Remarque 9. On peut définir la même notion pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ces deux notions coïncidant bien si A est la matrice de u dans une base quelconque de E .

Exemple 10. Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on a $\chi_A = X^2 - \text{trace}(A)X + \det(A)$.

Proposition 11. Soit λ une valeur propre de u de multiplicité α en tant que racine de χ_u . Alors,

$$\dim(E_\lambda) \in \llbracket 1, \alpha \rrbracket$$

Proposition 12. (i) Le polynôme caractéristique est un invariant de similitude.

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\chi_A = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Alors, $a_0 = \det(A)$ et $a_{n-1} = \text{trace}(A)$ (à un signe près).

[GOU21]
p. 172

3. Polynôme minimal

Lemme 13. (i) $\text{Ann}(u) = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{K}[u]$ non réduit au polynôme nul.

(ii) $\text{Ann}(u)$ est le noyau de $P \mapsto P(u)$: c'est un idéal de $\mathbb{K}[u]$.

(iii) Il existe un unique polynôme unitaire engendrant cet idéal.

[ROM21]
p. 604

Définition 14. On appelle **idéal annulateur** de u l'idéal $\text{Ann}(u)$. Le polynôme unitaire générateur est noté π_u et est appelé **polynôme minimal** de u .

Remarque 15. — π_u est le polynôme unitaire de plus petit degré annulant u .
 — Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice de u dans une base de E , on a $\text{Ann}(u) = \text{Ann}(A)$ et $\pi_u = \pi_A$.

Exemple 16. Un endomorphisme est nilpotent d'indice q si et seulement si son polynôme minimal est X^q .

Proposition 17. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u . Alors, le polynôme minimal de l'endomorphisme $u|_F : F \rightarrow F$ divise π_u .

Proposition 18. (i) Les valeurs propres de u sont racines de tout polynôme annulateur.
 (ii) Les valeurs propres de u sont exactement les racines de π_u .

Remarque 19. π_u et χ_u partagent donc les mêmes racines.

[GOU21]
p. 186

Théorème 20 (Cayley-Hamilton).

$$\pi_u \mid \chi_u$$

[ROM21]
p. 607

Corollaire 21.

$$\dim(\mathbb{K}[u]) \leq n$$

II - Diagonalisabilité

1. Définition

Définition 22. — On dit que u est **diagonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.
 — On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale.

p. 683

Remarque 23. u est diagonalisable si et seulement si sa matrice dans n'importe quelle base de E l'est.

Exemple 24. — Les projecteurs (ie. les endomorphismes $p \in \mathcal{L}(E)$ tels que $p^2 = p$) sont toujours diagonalisables, à valeurs propres dans $\{0, 1\}$.
 — Les symétries (ie. les endomorphismes $s \in \mathcal{L}(E)$ tels que $s^2 = \text{id}_E$) sont toujours diagonalisables, à valeurs propres dans $\{\pm 1\}$. Par exemple, l'endomorphisme de trans-

[BMP]
p. 166

position $A \mapsto {}^t A$ est diagonalisable.

2. Critères

Proposition 25. Si u a n valeurs propres distinctes dans \mathbb{K} , alors il est diagonalisable.

[ROM21]
p. 683

Théorème 26 (Lemme des noyaux). Soit $P = P_1 \dots P_k \in \mathbb{K}[X]$ où les polynômes P_1, \dots, P_k sont premiers entre eux deux à deux. Alors,

p. 609

$$\text{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^k \text{Ker}(P_i(u))$$

Théorème 27. Soit $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

p. 683

- (i) u est diagonalisable sur \mathbb{K} .
- (ii) $E = \bigoplus_{k=1}^p E_{\lambda_k}$.
- (iii) $\sum_{k=1}^p \dim(E_{\lambda_k}) = n$.
- (iv) χ_n est scindé sur \mathbb{K} et pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la dimension de E_{λ_k} est égale à la multiplicité de λ_k dans χ_u .
- (v) $\exists P \in \text{Ann}(u)$ scindé à racines simples.
- (vi) π_u est scindé à racines simples.

Exemple 28. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

[GOU21]
p. 177

Corollaire 29. Sur $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$, u est diagonalisable si et seulement si $u^q = u$.

p. 188

Théorème 30 (Diagonalisation simultanée). Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes de E diagonalisables. Il existe une base commune de diagonalisation dans E pour $(u_i)_{i \in I}$ si et seulement si ces endomorphismes commutent deux-à-deux.

p. 176

Remarque 31. La réciproque est vraie.

3. Exemples d'endomorphismes diagonalisables dans un espace euclidien ou hermitien

On se place dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on munit E d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on munit E d'un produit scalaire hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

a. Endomorphismes autoadjoints

Lemme 32. Il existe un unique $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$$

[GOU21]
p. 255

Définition 33. L'endomorphisme u^* précédent est l'**adjoint** de u . On dit que u est **autoadjoint** si $u = u^*$.

Proposition 34. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Alors $v = u^*$ si et seulement si la matrice de v dans une base orthonormée \mathcal{B} de E est la transposée (transconjugée dans le cas hermitien) de la matrice de u dans \mathcal{B} .

Théorème 35. Tout endomorphisme autoadjoint se diagonalise dans une base orthonormée, ses valeurs propres étant réelles.

Lemme 36.

$$\forall A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \exists ! B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ telle que } B^2 = A$$

[C-G]
p. 376

Application 37 (Décomposition polaire). L'application

$$\mu : \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \rightarrow & \text{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) & \mapsto & OS \end{array}$$

est un homéomorphisme.

[DEV]

b. Endomorphismes normaux

On suppose dans toute cette sous-section que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Définition 38. u est dit **normal** s'il est tel que $u \circ u^* = u^* \circ u$.

[GRI]
p. 286

Proposition 39. On suppose u normal. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de u . Alors :

- (i) $E_\lambda^\perp = \{x \in E^\lambda \mid \forall y \in E^\lambda, \langle x, y \rangle = 0\}$ est stable par u .
- (ii) $u|_{E_\lambda^\perp}$ est normal.

Corollaire 40. On suppose u normal. Alors u est diagonalisable dans une base orthonormée.

4. Topologie

Proposition 41. L'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables à coefficients complexes est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

[BMP]
p. 179

Application 42. L'application qui à une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associe la partie diagonalisable de sa décomposition de Dunford $M = D + N$ n'est pas continue.

Application 43.

$$\forall U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \chi_U(U) = 0$$

p. 217

III - Applications

1. Réduction

Théorème 44 (Décomposition de Dunford). On suppose que π_u est scindé sur \mathbb{K} . Alors il existe un unique couple d'endomorphismes (d, n) tels que :

- d est diagonalisable et n est nilpotent.
- $u = d + n$.
- $dn = nd$.

[GOU21]
p. 203

Corollaire 45. Si u vérifie les hypothèses précédentes, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k = (d + n)^k = \sum_{i=0}^m \binom{k}{i} d^i n^{k-i}$, avec $m = \min(k, l)$ où l désigne l'indice de nilpotence de n .

Remarque 46. On peut montrer de plus que d et n sont des polynômes en u .

[DEV]

2. Calcul d'exponentielles

Lemme 47. (i) La série entière $\sum \frac{z^k}{k!}$ a un rayon de convergence infini.

(ii) $\sum \frac{A^k}{k!}$ est convergente pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

[ROM21]
p. 761

Définition 48. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit l'**exponentielle** de A par

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

on la note aussi $\exp(A)$ ou e^A .

Théorème 49. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) Si $A = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, alors $\exp(A) = \text{Diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$.

(ii) Si $B = PAP^{-1}$ pour $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $e^B = P^{-1}e^A P$.

(iii) $\det(e^A) = e^{\text{trace}(A)}$.

(iv) $t \mapsto e^{tA}$ est de classe \mathcal{C}^∞ , de dérivée $t \mapsto e^{tA} A$.

Proposition 50. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent. Alors,

$$e^A e^B = e^{A+B} = e^B e^A$$

Exemple 51. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui admet une décomposition de Dunford $A = D + N$ où D est diagonalisable et N est nilpotente d'indice q . Alors,

— $e^A = e^D e^N = e^D \sum_{k=0}^{q-1} \frac{N^k}{k!}$.

— La décomposition de Dunford de e^A est $e^A = e^D + e^D(e^N - I_n)$ avec e^D diagonalisable et $e^D(e^N - I_n)$ nilpotente.

Application 52. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est scindé sur \mathbb{K} . Alors A est diagonalisable si et seulement si e^A l'est.

Application 53. Une équation différentielle linéaire homogène $(H) : Y' = AY$ (où A est constante en t) a ses solutions maximales définies sur \mathbb{R} et le problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = y_0 \end{cases}$$

a pour (unique) solution $t \mapsto e^{tA} y_0$.

[GOU20]
p. 380

Bibliographie

Objectif agrégation

[BMP]

Vincent BECK, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ. *Objectif agrégation*. 2^e éd. H&K, 22 août 2005.

<https://objectifagregation.github.io>.

Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries

[C-G]

Philippe CALDERO et Jérôme GERMONI. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome 1*. Calvage & Mounet, 13 mai 2017.

<http://www.calvage-et-mounet.fr/2022/05/09/nouvelles-histoires-hedoniste-de-groupes-et-de-geometrie/>.

Les maths en tête

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3^e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.

Les maths en tête

[GOU21]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités*. 3^e éd. Ellipses, 13 juill. 2021.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html>.

Algèbre Linéaire

[GRI]

Joseph GRIFONE. *Algèbre Linéaire*. 6^e éd. Cépaduès, 9 jan. 2019.

<https://www.cepades.com/livres/algebre-lineaire-edition-9782364936737.html>.

Mathématiques pour l'agrégation

[ROM21]

Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie*. 2^e éd. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332201-mathematiques-pour-l-agregation-algebre-et-geometrie>.