

153 Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.

I - Spectre d'un endomorphisme

Soit E un espace vectoriel sur un corps \mathbb{K} de dimension finie n . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E .

1. Valeurs propres, vecteurs propres

Définition 1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On dit que λ est **valeur propre** de u si $u - \lambda \text{id}_E$ est non injective.
- Un vecteur $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$ est un **vecteur propre** de u associé à la valeur propre λ .
- $E_\lambda = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$ est le **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ .
- L'ensemble des valeurs propres de u est appelé **spectre** de u . On le note $\text{Sp}(u)$.

[GOU21]
p. 171

Remarque 2. — 0 est valeur propre de u si et seulement si $\text{Ker}(f) \neq \{0\}$.

- On peut définir de la même manière les mêmes notions pour une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (une valeur est propre pour une matrice si et seulement si elle l'est pour l'endomorphisme associé). On reprendra les mêmes notations.
- Les sous-espaces E_λ sont stables par u pour toute valeur propre λ .

Exemple 3. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre 1.

Théorème 4. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des valeurs propres de u , distinctes deux à deux. Alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_k}$ sont en somme directe.

Théorème 5. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Pour tout valeur propre λ de u , $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$. Si le corps \mathbb{K} est algébriquement clos, on a alors

$$\text{Sp}(P(u)) = \{P(\lambda) \mid \lambda \in \text{Sp}(u)\}$$

[ROM21]
p. 604

Contre-exemple 6. Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $P = X^2$, on a $A^2 = -I_2$ et $\text{Sp}(A) = \emptyset$.

2. Polynôme caractéristique

Proposition 7. En notant $\chi_u = \det(X \text{id}_E - u)$,

p. 644

$$\text{Sp}(u) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \chi_u(\lambda) = 0\}$$

Définition 8. Le polynôme χ_u précédent est appelé **polynôme caractéristique** de u .

Remarque 9. On peut définir la même notion pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ces deux notions coïncidant bien si A est la matrice de u dans une base quelconque de E .

Exemple 10. Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on a $\chi_A = X^2 - \text{trace}(A)X + \det(A)$.

Proposition 11. Soit λ une valeur propre de u de multiplicité α en tant que racine de χ_u . Alors,

$$\dim(E_\lambda) \in \llbracket 1, \alpha \rrbracket$$

Proposition 12. (i) Le polynôme caractéristique est un invariant de similitude.

[GOU21]
p. 172

(ii) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\chi_A = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Alors, $a_0 = \det(A)$ et $a_{n-1} = \text{trace}(A)$ (à un signe près).

3. Polynôme minimal

Lemme 13. (i) $\text{Ann}(u) = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{K}[u]$ non réduit au polynôme nul.

[ROM21]
p. 604

(ii) $\text{Ann}(u)$ est le noyau de $P \mapsto P(u)$: c'est un idéal de $\mathbb{K}[u]$.

(iii) Il existe un unique polynôme unitaire engendrant cet idéal.

Définition 14. On appelle **idéal annulateur** de u l'idéal $\text{Ann}(u)$. Le polynôme unitaire générateur est noté π_u et est appelé **polynôme minimal** de u .

Remarque 15. — π_u est le polynôme unitaire de plus petit degré annulant u .
 — Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice de u dans une base de E , on a $\text{Ann}(u) = \text{Ann}(A)$ et $\pi_u = \pi_A$.

Exemple 16. Un endomorphisme est nilpotent d'indice q si et seulement si son polynôme minimal est X^q .

Proposition 17. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u . Alors, le polynôme minimal de l'endomorphisme $u|_F : F \rightarrow F$ divise π_u .

Proposition 18. (i) Les valeurs propres de u sont racines de tout polynôme annulateur.
 (ii) Les valeurs propres de u sont exactement les racines de π_u .

Remarque 19. π_u et χ_u partagent donc les mêmes racines.

[GOU21]
p. 186

Théorème 20 (Cayley-Hamilton).

$$\pi_u \mid \chi_u$$

[ROM21]
p. 607

Corollaire 21.

$$\dim(\mathbb{K}[u]) \leq n$$

II - Localisation

Soit $A = (a_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Disques de Gerschgorin

Notation 22. On note :

- Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $L_i = \sum_{j \neq i}^n |a_{i,j}|$ et $L = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \{L_i + |a_{i,i}|\}$.
- Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $C_j = \sum_{i \neq j}^n |a_{i,j}|$ et $C = \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \{C_j + |a_{j,j}|\}$.

p. 650

Théorème 23 (Gerschgorin-Hadamard). Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A . Alors, il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|\lambda - a_{i,i}| \leq L_i$.

[FGN2]
p. 189

Remarque 24. Ainsi,

$$\text{Sp}(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^n \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{i,i}| \leq L_i\}$$

Les disques de cette réunion sont appelés disques de Gerschgorin.

Exemple 25. Soient $a, b \in \mathbb{R}^2$. On pose

$$A(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ b & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & b & a & b \\ 0 & \dots & 0 & b & a \end{pmatrix}$$

Alors,

$$\text{Sp}(A(a, b)) = \left\{ a + 2b \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) \mid k \in \llbracket 1, n \rrbracket \right\}$$

[ROM21]
p. 672

Exemple 26. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors,

$$\text{Sp}({}^tAA) = \left\{ 4 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)^2 \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$$

Corollaire 27. Pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de A , on a

$$\lambda \leq \min(L, C)$$

p. 651

Corollaire 28. On suppose A à diagonale strictement dominante (ie. $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|$). Alors, A est inversible.

Théorème 29 (Ostrowski). Pour tout $\alpha \in [0, 1]$ et toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de A , il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que

$$|\lambda - a_{i,i}| \leq L_i^\alpha C_i^{1-\alpha}$$

Remarque 30. C'est une généralisation du Théorème 23 : pour $\alpha = 1$, on retrouve l'énoncé correspondant.

Corollaire 31. Pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de A , il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que

$$|\lambda|^2 \leq (L_i + |a_{i,i}|)(C_i + |a_{i,i}|)$$

2. Utilisation du rayon spectral

Notation 32. À toute norme $|\cdot|$ sur \mathbb{C}^n , on associe la norme matricielle

$$\|\cdot\| : M \mapsto \sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Mx\|}{\|x\|}$$

Définition 33. Le **rayon spectral** de A , noté $\rho(A)$ est défini par

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$$

Théorème 34. On a

$$\|A\|_2 = \sqrt{\|A^*A\|_2} = \sqrt{\rho(A^*A)}$$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme matricielle associée à la norme euclidienne sur \mathbb{C}^n et A^* est la trans-conjuguée de A .

Théorème 35. (i) On a $\rho(A) \leq \|A\|$ pour toute norme matricielle $\|\cdot\|$ induite par une norme vectorielle.

(ii) $\rho_{\|\cdot\| \in \mathcal{N}} \|A\|$ où \mathcal{N} désigne l'ensemble de toutes les normes matricielles induites par une norme vectorielle.

Théorème 36 (Décomposition de Dunford). Soit $f \in \mathcal{E}$ un endomorphisme tel que son polynôme minimal π_f soit scindé sur \mathbb{K} . Alors il existe un unique couple d'endomorphismes (d, n) tel que :

- $f = d + n$.
- d est diagonalisable et n est nilpotent.
- $d \circ n = n \circ d$.

[GOU21]
p. 203

[ROM21]
p. 660

[DEV]

Corollaire 37 (Théorème de Gelfand). Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors,

$$\rho(A) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$$

3. Application à l'étude d'une suite de polygones

Proposition 38. Les conditions suivantes sont équivalentes.

- (i) $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = 0$.
- (ii) Pour toute valeur initiale $x_0 \in \mathbb{C}^n$, la suite définie par récurrence pour tout $k \in \mathbb{N}$ par $x_{k+1} = Ax_k$, converge vers le vecteur nul.
- (iii) $\rho(A) < 1$.
- (iv) Il existe au moins une norme matricielle $\|\cdot\|$ induite par une norme vectorielle telle que $\|A\| < 1$.

Lemme 39 (Déterminant circulant). Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Alors

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} P(\omega^j)$$

où $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

[GOU21]
p. 153

[DEV]

Application 40 (Suite de polygones). Soit P_0 un polygone dont les sommets sont $\{z_{0,1}, \dots, z_{0,n}\}$. On définit la suite de polygones (P_k) par récurrence en disant que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les sommets de P_{k+1} sont les milieux des arêtes de P_k .

Alors la suite (P_k) converge vers l'isobarycentre de P_0 .

[I-P]
p. 389

III - Approximation

Soit $A = (a_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Théorème 41. On suppose que la valeur propre de A de module maximum est unique. On la note λ_1 . Elle est alors réelle et simple, l'espace propre associé est une droite vectorielle et on a

$$\mathbb{R}^n = \text{Ker}(A - \lambda_1 I_n) \oplus \text{Im}(A - \lambda_1 I_n)$$

[ROM19-2]
p. 210

On suppose pour la suite que la valeur propre de A de module maximum est unique. On la note λ_1 .

Notation 42. On note et on définit :

- $E_1 = \text{Ker}(A - \lambda_1 I_n)$ et $F_1 = \text{Im}(A - \lambda_1 I_n)$.
- $x_0 = e_1 + f_1$ avec $e_1 \in E_1 \setminus \{0\}$ et $f_1 \in F_1$.
- $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_{k+1} = \frac{1}{\|Ax_k\|} Ax_k$ avec $\|\cdot\|$ norme quelconque sur \mathbb{R}^n .
- Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $e_{1,j}$ la j -ième composante du vecteur e_1 , $x_{k,j}$ celle de x_k et $(Ax_k)_j$ celle de Ax_k .

Théorème 43 (Méthode la puissance itérée). On a :

- (i) $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|Ax_k\| = |\lambda_1| = \rho(A)$.
- (ii) $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{2k} = v_1$ où v_1 est un vecteur propre non nul associé à la valeur propre λ_1 .
- (iii) $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{2k+1} = \text{signe}(\lambda_1) v_1$.
- (iv) Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, tel que $e_{1,j} \neq 0$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(Ax_k)_j}{x_{k,j}} = \lambda_1$$

Remarque 44. — Si A est inversible, la méthode précédente appliquée à A^{-1} permet de calculer la valeur propre de plus petit module de A (quand cette dernière est unique).

- En notant e_1 un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_1 de norme euclidienne égale à 1, les valeurs propres de la matrice $B = A - \lambda_1 e_1 e_1^t$ sont $0, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. On pourra alors appliquer la méthode à B .

Annexes

[I-P]
p. 389

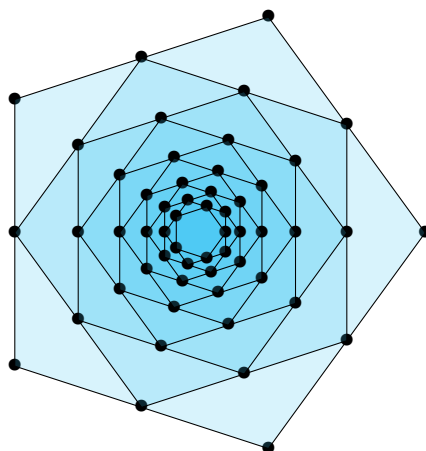


FIGURE 1 – La suite de polygones.

Bibliographie

Oraux X-ENS Mathématiques

[FGN2]

Serge FRANCINO, Hervé GIANELLA et Serge NICOLAS. *Oraux X-ENS Mathématiques. Volume 2*. 2^e éd. Cassini, 16 mars 2021.

<https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/111-oraux-x-ens-mathematiques-nouvelle-serie-vol-2.html>.

Les maths en tête

[GOU21]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités*. 3^e éd. Ellipses, 13 juill. 2021.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html>.

L'oral à l'agrégation de mathématiques

[I-P]

Lucas ISENMANN et Timothée PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements*. 2^e éd. Ellipses, 26 mars 2024.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html>.

Analyse matricielle

[ROM19-2]

Jean-Étienne ROMBALDI. *Analyse matricielle. Cours et exercices résolus*. 2^e éd. EDP Sciences, 7 nov. 2019.

<https://laboutique.edpsciences.fr/produit/1101/9782759824199/analyse-matricielle-cours-et-exercices-resolus>.

Mathématiques pour l'agrégation

[ROM21]

Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie*. 2^e éd. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332201-mathematiques-pour-l-agregation-algebre-et-geometrie>.