154 Exemples de décompositions de matrices. Applications.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $n \geq 1$.

I - Décomposition et réduction

1. Décomposition de Dunford

a. Décomposition "classique"

[DEV]

Théorème 1 (Décomposition de Dunford)**.** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que π_A est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple de matrices (D, N) tels que : [GOU21] p. 203

- D est diagonalisable et N est nilpotente.
- $A = D + N$.
- $DN = ND$.

Corollaire 2. Si A vérifie les hypothèse précédentes, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = (D+N)^k = \sum_{i=0}^{m} \binom{k}{i} D^i N^{k-i}$, avec $m = \min(k, l)$ où l désigne l'indice de nilpotence de N.

Remarque 3. On peut montrer de plus que D et N sont des polynômes en A.

Exemple 4. On a la décomposition de Dunford suivante : [C-G] p. 165

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Contre-exemple 5. L'égalité suivante n'est pas une décomposition de Dunford :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

car les deux matrices du membre de droite ne commutent pas.

Lemme 6. (i) La série entière $\sum \frac{z^k}{k!}$ a un rayon de convergence infini. [ROM21] p. 761

(ii) $\sum \frac{A^k}{k!}$ est convergente pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit **l'exponentielle** de A par

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

on la note aussi $\exp(A)$ ou e^A.

Théorème 8. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) Si $A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, alors $\exp(A) = \mathrm{Diag}(e_1^\lambda, \dots, e_n^\lambda)$.

(ii) Si $B = PAP^{-1}$ pour $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $e^B = P^{-1} e^A P$.

(iii) $\det(e^A) = e^{\mathrm{trace}(A)}$.

(iv) $t \mapsto e^{tA}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$, de dérivée $t \mapsto e^{tA} A$.

Proposition 9. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent. Alors,

$$e^A e^B = e^{A+B} = e^B e^A$$

Exemple 10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui admet une décomposition de Dunford $A = D + N$ où D est diagonalisable et N est nilpotente d'indice q. Alors,

— $e^A = e^D e^N = e^D \sum_{k=0}^{q-1} \frac{N^k}{k!}$.

— La décomposition de Dunford de e^A est $e^A = e^D + e^D(e^N - I_n)$ avec e^D diagonalisable et $e^D(e^N - I_n)$ nilpotente.

Application 11. Une équation différentielle linéaire homogène $(H) : Y' = AY$ (où A est constante en t) a ses solutions maximales définies sur $\mathbb{R}$ et le problème de Cauchy [GOU20] p. 380

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = y_0 \end{cases}$$

a pour (unique) solution $t \mapsto e^{tA} y_0$.

b. Décomposition multiplicative

Définition 12. On dit qu'une matrice $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **unipotente** si $U - I_n$ est nilpotente. [ROM21] p. 687

Théorème 13 (Décomposition de Dunford multiplicative)**.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que π_A est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple de matrices (D, U) tels que :

— D est diagonalisable et U est unipotente.

— $A = DU$.
— $DU = UD$.

2. Décomposition de Jordan

Définition 14. Un **bloc de Jordan** de taille m associé à $\lambda \in \mathbb{K}$ désigne la matrice $J_m(\lambda)$ suivante :

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$$

[BMP] p. 171

Proposition 15. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est semblable à $J_n(0)$.
(ii) A est nilpotente et cyclique (voir Définition 21).
(iii) A est nilpotente d'indice de nilpotence n.

Théorème 16 (Réduction de Jordan d'un endomorphisme nilpotent)**.** On suppose que A est nilpotente. Alors il existe des entiers $n_1 \geq \cdots \geq n_p$ tels que A est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} J_{n_1}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_p}(0) \end{pmatrix}$$

De plus, on a unicité dans cette décomposition.

Remarque 17. Comme l'indice de nilpotence d'un bloc de Jordan est égal à sa taille, l'indice de nilpotence de A est la plus grande des tailles des blocs de Jordan de la réduite.

Théorème 18 (Réduction de Jordan d'un endomorphisme)**.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{K}$:

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\alpha_i} \text{ où les } \lambda_i \text{ sont distincts deux-à-deux}$$

[GOU21] p. 209

Alors il existe des entiers $n_1 \geq \dots \geq n_p$ tels que A est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_p}(\lambda_p) \end{pmatrix}$$

De plus, on a unicité dans cette décomposition.

Application 19. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, A et $2A$ sont semblables si et seulement si A est nilpotente.

Application 20. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, A et ${}^tA$ sont semblables.

3. Décomposition de Frobenius

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. p. 397

Définition 21. On dit que u est **cyclique** s'il existe $x \in E$ tel que $\{P(u)(x) \mid P \in \mathbb{K}[X]\} = E$.

Proposition 22. u est cyclique si et seulement si $\deg(\pi_u) = n$.

Définition 23. Soit $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{K}[X]$. On appelle **matrice compagnon** de P la matrice

$$\mathcal{C}(P) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{p-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix}$$

Proposition 24. u est cyclique si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \mathcal{C}(\pi_u)$.

Théorème 25. Il existe $F_1, \dots, F_r$ des sous-espaces vectoriels de E tous stables par u tels que :

- $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$.
- $u_i = u_{|F_i}$ est cyclique pour tout i.
- Si $P_i = \pi_{u_i}$, on a $P_{i+1} \mid P_i$ pour tout i.

La famille de polynômes $P_1, \dots, P_r$ ne dépend que de u et non du choix de la décomposition. On l'appelle **suite des invariants de similitude** de u.

Théorème 26 (Réduction de Frobenius)**.** Si $P_1, \dots, P_r$ désigne la suite des invariants de u, alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que :

$$\mathrm{Mat}(u, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} \mathscr{C}(P_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathscr{C}(P_r) \end{pmatrix}$$

On a d'ailleurs $P_1 = \pi_u$ et $P_1 \dots P_r = \chi_u$.

Corollaire 27. Deux endomorphismes de E sont semblables si et seulement s'ils ont la même suite d'invariants de similitude.

Application 28. Pour $n = 2$ ou 3, deux matrices sont semblables si et seulement si elles ont mêmes polynômes minimal et caractéristique.

Application 29. Soit $\mathbb{L}$ une extension de $\mathbb{K}$. Alors, si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{L})$, elles le sont aussi dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

II - Décomposition et résolution de systèmes

1. Décomposition LU

Définition 30. Les **sous-matrices principales** d'une matrice $(a_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont les matrices $A_k = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1,k]\!]} \in \mathscr{M}_k(\mathbb{K})$ où $k \in [\![1, n]\!]$. Les **déterminants principaux** sont les déterminants des matrices A_k, pour $k \in [\![1, n]\!]$. **[ROM21]** p. 690

Théorème 31 (Décomposition lower-upper)**.** Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors, A admet une décomposition

$$A = LU$$

(où L est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et U une matrice triangulaire supérieure) si et seulement si tous les déterminants principaux de A sont non nuls. Dans ce cas, une telle décomposition est unique.

Corollaire 32. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \cap \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$. Alors, on a l'unique décomposition de A :

$$A = LD{}^tL$$

où L est une matrice triangulaire inférieure et D une matrice diagonale.

Application 33 (Décomposition de Cholesky)**.** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors, $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ triangulaire inférieure telle que $A = B^t B$. De plus, une telle décomposition est unique si on impose la positivité des coefficients diagonaux de B.

Exemple 34. On a la décomposition de Cholesky : [GRI] p. 368

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition 35. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ vérifiant les hypothèses du Théorème 31. On définit la suite (A_k) où $A_0 = A$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, A_{k+1} est la matrice obtenue à partir de A_k à l'aide du pivot de Gauss sur la $(k+1)$-ième colonne. Alors, A_{n-1} est la matrice U de la décomposition $A = LU$ du Théorème 31. [C-G] p. 257

Remarque 36. Pour résoudre un système linéaire $AX = Y$, on se ramène à $A = LU$ en $O\left(\frac{2}{3}n^3\right)$. Puis, on résout deux systèmes triangulaires “en cascade” :

$$LX' = Y \text{ puis } UX = X'$$

ceux-ci demandant chacun $O(2n^2)$ opérations.

Théorème 37 (Décomposition PLU)**.** Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, matrice de permutations, telle que $P^{-1}A$ admet une décomposition LU.

2. Décomposition QR

Théorème 38 (Décomposition QR)**.** Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Alors, A admet une décomposition [ROM21] p. 692

$$A = QR$$

où Q est une matrice orthogonale et R est une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs. On a unicité d'une telle décomposition.

Corollaire 39 (Théorème d'Iwasawa)**.** Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Alors, A admet une décomposition

$$A = QDR$$

où Q est une matrice orthogonale, D est une matrice diagonale à coefficients strictement positifs et R est une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux égaux à 1. On a unicité d'une telle décomposition.

Exemple 40. On a la factorisation QR suivante, [GRI] p. 272

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \right)$$

qui peut être obtenue via un procédé de Gram-Schmidt.

Remarque 41. Pour résoudre un système linéaire $AX = Y$, si l'on a trouvé une telle factorisation $A = QR$, on résout p. 368

$$RX = {}^tQY$$

c'est-à-dire, un seul système triangulaire (contre deux pour la factorisation LU).

III - Décomposition et topologie

Lemme 42. [C-G] p. 376

$$\forall A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \, \exists! B \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ telle que } B^2 = A$$

[DEV] **Théorème 43** (Décomposition polaire)**.** L'application

$$\mu : \begin{array}{ccc} \mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \to & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) & \mapsto & OS \end{array}$$

est un homéomorphisme.

Corollaire 44. Tout sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ qui contient $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.

Corollaire 45. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+$ est connexe. p. 401

Bibliographie

Objectif agrégation **[BMP]**

Vincent Beck, Jérome Malick et Gabriel Peyré. *Objectif agrégation.* 2e éd. H&K, 22 août 2005.
https://objectifagregation.github.io.

Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries **[C-G]**

Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome 1.* Calvage & Mounet, 13 mai 2017.
http://www.calvage-et-mounet.fr/2022/05/09/nouvelles-histoires-hedoniste-de-groupes-et-de-geometrie/.

Les maths en tête **[GOU20]**

Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Analyse.* 3e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html.

Les maths en tête **[GOU21]**

Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités.* 3e éd. Ellipses, 13 juill. 2021.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html.

Algèbre Linéaire **[GRI]**

Joseph Grifone. *Algèbre Linéaire.* 6e éd. Cépaduès, 9 jan. 2019.
https://www.cepadues.com/livres/algebre-lineaire-edition-9782364936737.html.

Mathématiques pour l'agrégation **[ROM21]**

Jean-Étienne Rombaldi. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie.* 2e éd. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.
https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332201-mathematiques-pour-l-agregation-algebre-et-geometrie.