

# 154 Exemples de décompositions de matrices. Applications.

Soit  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Soit  $n \geq 1$ .

## I - Décomposition et réduction

### 1. Décomposition de Dunford

#### a. Décomposition classique

**Théorème 1** (Décomposition de Dunford). Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On suppose que  $\pi_A$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ . Alors il existe un unique couple de matrices  $(D, N)$  tels que :

- $D$  est diagonalisable et  $N$  est nilpotente.
- $A = D + N$ .
- $DN = ND$ .

[GOU21]  
p. 203

**Corollaire 2.** Si  $A$  vérifie les hypothèses précédentes, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A^k = (D + N)^k = \sum_{i=0}^m \binom{k}{i} D^i N^{k-i}$ , avec  $m = \min(k, l)$  où  $l$  désigne l'indice de nilpotence de  $N$ .

*Remarque 3.* On peut montrer de plus que  $D$  et  $N$  sont des polynômes en  $A$ .

**Exemple 4.** On a la décomposition de Dunford suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[C-G]  
p. 165

**Contre-exemple 5.** L'égalité suivante n'est pas une décomposition de Dunford :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

car les deux matrices du membre de droite ne commutent pas.

**Lemme 6.** (i) La série entière  $\sum \frac{z^k}{k!}$  a un rayon de convergence infini.

(ii)  $\sum \frac{A^k}{k!}$  est convergente pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

[ROM21]  
p. 761

**Définition 7.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On définit l'**exponentielle** de  $A$  par

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

on la note aussi  $\exp(A)$  ou  $e^A$ .

**Théorème 8.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- (i) Si  $A = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , alors  $\exp(A) = \text{Diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$ .
- (ii) Si  $B = PAP^{-1}$  pour  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ , alors  $e^B = P^{-1}e^AP$ .
- (iii)  $\det(e^A) = e^{\text{trace}(A)}$ .
- (iv)  $t \mapsto e^{tA}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , de dérivée  $t \mapsto e^{tA}A$ .

**Proposition 9.** Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qui commutent. Alors,

$$e^A e^B = e^{A+B} = e^B e^A$$

**Exemple 10.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qui admet une décomposition de Dunford  $A = D + N$  où  $D$  est diagonalisable et  $N$  est nilpotente d'indice  $q$ . Alors,

- $e^A = e^D e^N = e^D \sum_{k=0}^{q-1} \frac{N^k}{k!}$ .
- La décomposition de Dunford de  $e^A$  est  $e^A = e^D + e^D(e^N - I_n)$  avec  $e^D$  diagonalisable et  $e^D(e^N - I_n)$  nilpotente.

**Application 11.** Une équation différentielle linéaire homogène  $(H) : Y' = AY$  (où  $A$  est constante en  $t$ ) a ses solutions maximales définies sur  $\mathbb{R}$  et le problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = y_0 \end{cases}$$

a pour (unique) solution  $t \mapsto e^{tA}y_0$ .

[GOU20]  
p. 380

## b. Décomposition multiplicative

**Définition 12.** On dit qu'une matrice  $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est **unipotente** si  $U - I_n$  est nilpotente.

[ROM21]  
p. 687

**Théorème 13** (Décomposition de Dunford multiplicative). Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On suppose que  $\pi_A$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ . Alors il existe un unique couple de matrices  $(D, U)$  tels que :

- $D$  est diagonalisable et  $U$  est unipotente.

- $A = DU$ .
- $DU = UD$ .

## 2. Décomposition de Jordan

**Définition 14.** Un **bloc de Jordan** de taille  $m$  associé à  $\lambda \in \mathbb{K}$  désigne la matrice  $J_m(\lambda)$  suivante :

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$$

[BMP]  
p. 171

**Proposition 15.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $A$  est semblable à  $J_n(0)$ .
- (ii)  $A$  est nilpotente et cyclique (voir Définition 21).
- (iii)  $A$  est nilpotente d'indice de nilpotence  $n$ .

**Théorème 16** (Réduction de Jordan d'un endomorphisme nilpotent). On suppose que  $A$  est nilpotente. Alors il existe des entiers  $n_1 \geq \dots \geq n_p$  tels que  $A$  est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} J_{n_1}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_p}(0) \end{pmatrix}$$

De plus, on a unicité dans cette décomposition.

*Remarque 17.* Comme l'indice de nilpotence d'un bloc de Jordan est égal à sa taille, l'indice de nilpotence de  $A$  est la plus grande des tailles des blocs de Jordan de la réduite.

**Théorème 18** (Réduction de Jordan d'un endomorphisme). Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On suppose que le polynôme caractéristique de  $A$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  :

$$\chi_A = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{\alpha_i} \text{ où les } \lambda_i \text{ sont distincts deux-à-deux}$$

[GOU21]  
p. 209

Alors il existe des entiers  $n_1 \geq \dots \geq n_p$  tels que  $A$  est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_p}(\lambda_p) \end{pmatrix}$$

De plus, on a unicité dans cette décomposition.

**Application 19.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors,  $A$  et  $2A$  sont semblables si et seulement si  $A$  est nilpotente.

**Application 20.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors,  $A$  et  ${}^t A$  sont semblables.

### 3. Décomposition de Frobenius

Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

p. 397

**Définition 21.** On dit que  $u$  est **cyclique** s'il existe  $x \in E$  tel que  $\{P(u)(x) \mid P \in \mathbb{K}[X]\} = E$ .

**Proposition 22.**  $u$  est cyclique si et seulement si  $\deg(\pi_u) = n$ .

**Définition 23.** Soit  $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{K}[X]$ . On appelle **matrice compagnon** de  $P$  la matrice

$$\mathcal{C}(P) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{p-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix}$$

**Proposition 24.**  $u$  est cyclique si et seulement s'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que  $\text{Mat}(u, \mathcal{B}) = \mathcal{C}(\pi_u)$ .

**Théorème 25.** Il existe  $F_1, \dots, F_r$  des sous-espaces vectoriels de  $E$  tous stables par  $u$  tels que :

- $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$ .
- $u_i = u|_{F_i}$  est cyclique pour tout  $i$ .
- Si  $P_i = \pi_{u_i}$ , on a  $P_{i+1} \mid P_i$  pour tout  $i$ .

La famille de polynômes  $P_1, \dots, P_r$  ne dépend que de  $u$  et non du choix de la décomposition. On l'appelle **suite des invariants de similitude** de  $u$ .

**Théorème 26** (Réduction de Frobenius). Si  $P_1, \dots, P_r$  désigne la suite des invariants de  $u$ , alors il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que :

$$\text{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \mathcal{C}(P_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathcal{C}(P_r) \end{pmatrix}$$

On a d'ailleurs  $P_1 = \pi_u$  et  $P_1 \dots P_r = \chi_u$ .

**Corollaire 27.** Deux endomorphismes de  $E$  sont semblables si et seulement s'ils ont la même suite d'invariants de similitude.

**Application 28.** Pour  $n = 2$  ou  $3$ , deux matrices sont semblables si et seulement si elles ont mêmes polynômes minimal et caractéristique.

**Application 29.** Soit  $\mathbb{L}$  une extension de  $\mathbb{K}$ . Alors, si  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  sont semblables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{L})$ , elles le sont aussi dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

## II - Décomposition et résolution de systèmes

### 1. Décomposition LU

**Définition 30.** Les **sous-matrices principales** d'une matrice  $(a_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  sont les matrices  $A_k = (a_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1, k \rrbracket} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$  où  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Les **déterminants principaux** sont les déterminants des matrices  $A_k$ , pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

[ROM21]  
p. 690

**Théorème 31** (Décomposition lower-upper). Soit  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ . Alors,  $A$  admet une décomposition

$$A = LU$$

(où  $L$  est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et  $U$  une matrice triangulaire supérieure) si et seulement si tous les déterminants principaux de  $A$  sont non nuls. Dans ce cas, une telle décomposition est unique.

**Corollaire 32.** Soit  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ . Alors, on a l'unique décomposition de  $A$  :

$$A = LD^tL$$

où  $L$  est une matrice triangulaire inférieure et  $D$  une matrice diagonale.

**Application 33** (Décomposition de Cholesky). Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Alors,  $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  si et seulement s'il existe  $B \in GL_n(\mathbb{R})$  triangulaire inférieure telle que  $A = B^t B$ . De plus, une telle décomposition est unique si on impose la positivité des coefficients diagonaux de  $B$ .

**Exemple 34.** On a la décomposition de Cholesky :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[GRI]  
p. 368

**Proposition 35.** Soit  $A \in GL_n(\mathbb{K})$  vérifiant les hypothèses du Théorème 31. On définit la suite  $(A_k)$  où  $A_0 = A$  et  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $A_{k+1}$  est la matrice obtenue à partir de  $A_k$  à l'aide du pivot de Gauss sur la  $(k+1)$ -ième colonne. Alors,  $A_{n-1}$  est la matrice  $U$  de la décomposition  $A = LU$  du Théorème 31.

[C-G]  
p. 257

*Remarque 36.* Pour résoudre un système linéaire  $AX = Y$ , on se ramène à  $A = LU$  en  $O\left(\frac{2}{3}n^3\right)$ . Puis, on résout deux systèmes triangulaires "en cascade" :

$$LX' = Y \text{ puis } UX = X'$$

ceux-ci demandant chacun  $O(2n^2)$  opérations.

**Théorème 37** (Décomposition PLU). Soit  $A \in GL_n(\mathbb{K})$ . Alors, il existe  $P \in GL_n(\mathbb{K})$ , matrice de permutations, telle que  $P^{-1}A$  admet une décomposition  $LU$ .

## 2. Décomposition QR

**Théorème 38** (Décomposition QR). Soit  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ . Alors,  $A$  admet une décomposition

$$A = QR$$

où  $Q$  est une matrice orthogonale et  $R$  est une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs. On a unicité d'une telle décomposition.

[ROM21]  
p. 692

**Corollaire 39** (Théorème d'Iwasawa). Soit  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ . Alors,  $A$  admet une décomposition

$$A = QDR$$

où  $Q$  est une matrice orthogonale,  $D$  est une matrice diagonale à coefficients strictement positifs et  $R$  est une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux égaux à 1. On a unicité d'une telle décomposition.

**Exemple 40.** On a la factorisation QR suivante,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left( \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \right)$$

qui peut être obtenue via un procédé de Gram-Schmidt.

*Remarque 41.* Pour résoudre un système linéaire  $AX = Y$ , si l'on a trouvé une telle factorisation  $A = QR$ , on résout

$$RX = {}^t QY$$

c'est-à-dire, un seul système triangulaire (contre deux pour la factorisation LU).

p. 368

### III - Décomposition et topologie

**Lemme 42.**

$$\forall A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \exists ! B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ telle que } B^2 = A$$

[C-G]  
p. 376

**Théorème 43** (Décomposition polaire). L'application

$$\mu : \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \rightarrow & \text{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) & \rightarrow & OS \end{array}$$

est un homéomorphisme.

**Corollaire 44.** Tout sous-groupe compact de  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  qui contient  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  est  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ .

**Corollaire 45.**  $\text{GL}_n(\mathbb{R})^+$  est connexe.

p. 401

[DEV]

# Bibliographie

## **Objectif agrégation**

[BMP]

Vincent BECK, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ. *Objectif agrégation*. 2<sup>e</sup> éd. H&K, 22 août 2005.

<https://objectifagregation.github.io>.

## **Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries**

[C-G]

Philippe CALDERO et Jérôme GERMONI. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome 1*. Calvage & Mounet, 13 mai 2017.

<http://www.calvage-et-mounet.fr/2022/05/09/nouvelles-histoires-hedoniste-de-groupes-et-de-geometrie/>.

## **Les maths en tête**

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.

## **Les maths en tête**

[GOU21]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 13 juill. 2021.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html>.

## **Algèbre Linéaire**

[GRI]

Joseph GRIFONE. *Algèbre Linéaire*. 6<sup>e</sup> éd. Cépaduès, 9 jan. 2019.

<https://www.cepades.com/livres/algebre-lineaire-edition-9782364936737.html>.

## **Mathématiques pour l'agrégation**

[ROM21]

Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie*. 2<sup>e</sup> éd. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332201-mathematiques-pour-l-agregation-algebre-et-geometrie>.