

# 155 Exponentielle de matrices. Applications.

## I - Construction

Soit  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Soit  $n \geq 1$  un entier.

### 1. Algèbres de Banach

**Lemme 1.** Pour tout réel positif  $a$ , la série  $\sum \frac{a^n}{n!}$  est convergente.

[DAN]  
p. 278

**Définition 2.** Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre.

p. 174

- On dit que  $\|\cdot\|$  est une norme d'algèbre sur  $\mathcal{A}$  si :
  - (i)  $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$  est un espace vectoriel normé.
  - (ii)  $\forall x, y \in \mathcal{A}, \|x \times y\| \leq \|x\| \|y\|$ .
- Soit  $\|\cdot\|$  une norme d'algèbre sur  $\mathcal{A}$ . Si  $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$  est un espace vectoriel complet, on dit que  $\mathcal{A}$  est une **algèbre de Banach**.

**Proposition 3.** Soit  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathbb{K}^n$ . Muni de la norme

p. 183

$$\|\cdot\| : M \mapsto \sup_{x \neq 0} \frac{\|Mx\|}{\|x\|}$$

l'algèbre  $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|\cdot\|)$  est une algèbre de Banach.

**Contre-exemple 4.** Ce n'est pas vrai pour n'importe quelle norme : la norme infinie  $\|\cdot\|_\infty$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  n'est pas une norme d'algèbre.

**Proposition 5.** Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre de Banach unitaire. Pour tout élément  $A \in \mathcal{A}$ , la série  $\sum \frac{A^n}{n!}$  est convergente.

p. 278

### 2. Exponentielle de matrices

**Définition 6.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On appelle **exponentielle** de  $A$ , et on note  $\exp(A)$  ou  $e^A$  l'élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  suivant :

p. 345

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$$

p. 356

**Exemple 7.** Soient  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$  et  $D = \text{Diag}(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors,

$$\exp(D) = \text{Diag}(e^{a_1}, \dots, e^{a_n})$$

*Remarque 8.* En particulier,  $\exp(0) = I_n$ .

[GRI]  
p. 378

### 3. Propriétés

**Proposition 9.** Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qui commutent. Alors,

$$e^{A+B} = e^A e^B$$

**Corollaire 10.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors,  $e^A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  et,

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}$$

**Proposition 11.** Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telles que  $B = PAP^{-1}$  pour  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ . Alors,

$$e^{PAP^{-1}} = P e^A P^{-1}$$

**Lemme 12.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice triangulaire supérieure, de la forme  $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ . Alors,

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & * \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

**Proposition 13.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors,

$$\det(\exp(A)) = e^{\text{trace}(A)}$$

[ROM21]  
p. 762

**Proposition 14.**  $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{K})$  est continue. De plus, pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $\exp(A)$  est un polynôme en  $A$ .

## II - Calcul pratique

**Proposition 15.** Soit  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  nilpotente d'indice  $q$ . Alors,

[GOU21]  
p. 206

$$e^N = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{N^k}{k!}$$

**Théorème 16** (Décomposition de Dunford). Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On suppose que  $\pi_A$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ . Alors il existe un unique couple de matrices  $(D, N)$  tels que :

- $D$  est diagonalisable et  $N$  est nilpotente.
- $A = D + N$ .
- $DN = ND$ .

**Corollaire 17.** Si  $A$  vérifie les hypothèses précédentes, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A^k = (D + N)^k = \sum_{i=0}^m \binom{k}{i} D^i N^{k-i}$ , avec  $m = \min(k, l)$  où  $l$  désigne l'indice de nilpotence de  $N$ .

**Exemple 18.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qui admet une décomposition de Dunford  $A = D + N$  où  $D$  est diagonalisable et  $N$  est nilpotente d'indice  $q$ . Alors,

[ROM21]  
p. 765

- $e^A = e^D e^N = e^D \sum_{k=0}^{q-1} \frac{N^k}{k!}$ .
- La décomposition de Dunford de  $e^A$  est  $e^A = e^D + e^D(e^N - I_n)$  avec  $e^D$  diagonalisable et  $e^D(e^N - I_n)$  nilpotente.

**Application 19.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dont le polynôme caractéristique est scindé sur  $\mathbb{K}$ . Alors  $A$  est diagonalisable si et seulement si  $e^A$  l'est.

**Exemple 20.** On a

[GOU21]  
p. 209

$$\exp \left( \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -6e^2 + 3e^3 & -4e^2 + 4e^3 & 10e^2 - 6e^3 \\ -6e^2 + 3e^3 & -3e^2 + 4e^3 & 9e^2 - 6e^3 \\ -7e^2 + 3e^3 & -4e^2 + 4e^3 & 11e^2 - 6e^3 \end{pmatrix}$$

### III - Étude de l'exponentielle de matrices

#### 1. Dérivabilité, différentiabilité

**Proposition 21.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . L'application  $t \mapsto e^{tA}$  est dérivable, de dérivée  $t \mapsto Ae^{tA}$ .

p. 195

**Proposition 22** (Logarithme matriciel).  $\exp$  est différentiable en 0 et sa différentielle est  $I_n$  ; c'est un difféomorphisme local sur un voisinage de 0. Plus précisément, si  $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $\|H\| \leq 1$ , alors

[C-G]  
p. 384

$$\exp^{-1}(I_n + H) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{H^n}{n}$$

On note alors  $\ln(H) = \exp^{-1}(H)$ .

**Théorème 23.**  $\exp$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  avec, pour toutes matrices  $A, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  :

[ROM21]  
p. 762

$$d\exp_A(H) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{\substack{i,j \in [0, n-1] \\ i+j=n-1}} A^i H A^j \right)$$

#### 2. Image directe

##### a. Image de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

**Exemple 24.**

$$\forall k \in \mathbb{Z}, e^{2ik\pi} = e^0 = 1$$

En particulier,  $\exp$  n'est pas injective pour  $n \geq 1$ .

[C-G]  
p. 387

**Lemme 25.** Soit  $M \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ . Alors  $M^{-1} \in \mathbb{C}[M]$ .

[I-P]  
p. 396

**Théorème 26.**  $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$  est surjective.

**Application 27.**  $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \text{GL}_n(\mathbb{R})^2$ , où  $\text{GL}_n(\mathbb{R})^2$  désigne les carrés de  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ .

**Application 28.**  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  est connexe par arcs.

[ROM21]  
p. 770

**b. Image de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$** **Exemple 29.**

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \exp \left( \begin{pmatrix} 0 & -2k\pi \\ 2k\pi & 0 \end{pmatrix} \right) = \exp(0) = I_2$$

En particulier,  $\exp$  n'est pas injective pour  $n \geq 2$ .

[C-G]  
p. 387**Proposition 30.** En fait,

$$\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{M^2 \mid M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\}$$

**Exemple 31.** La matrice  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$  n'est pas dans l'image de l'exponentielle réelle.

**c. Images de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$** 

**Lemme 32.** Soit  $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Alors,

$$\|M\| = \rho(M)$$

où  $\rho$  est l'application qui à une matrice  $y$  associe son rayon spectral.

[I-P]  
p. 182

**Théorème 33.** L'application  $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  est un homéomorphisme.

*Remarque 34.* On a le même résultat pour  $\exp : \mathcal{H}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$ .

[C-G]  
p. 385

**Application 35.** On a des homéomorphismes :

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \sim \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \quad \text{et} \quad \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \sim \mathcal{U}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^{n^2}$$

[DEV]

### d. Image du cône nilpotent $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$

**Notation 36.** On note  $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$  le sous-ensemble de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  formé des matrices nilpotentes et  $\mathcal{L}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{N}_n(\mathbb{C}) - I_n$  le sous-ensemble de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  formé des matrices unipotentes.

[ROM21]  
p. 766

**Proposition 37.** Soit  $A \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$ . Alors  $e^A \in \mathcal{L}_n(\mathbb{C})$  et  $\ln(e^{tA}) = tA$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

**Théorème 38.** L'exponentielle matricielle réalise une bijection de  $\mathcal{N}_n(\mathbb{C})$  sur  $\mathcal{L}_n(\mathbb{C})$  d'inverse le logarithme matriciel défini à la Proposition 22.

## IV - Applications

### 1. Équations différentielles

**Théorème 39** (Cauchy-Lipschitz linéaire). Soient  $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $B : I \rightarrow \mathbb{K}^d$  deux fonctions continues. Alors  $\forall t_0 \in I$ , le problème de Cauchy

[GOU20]  
p. 376

$$\begin{cases} Y' = A(t)Y + B(t) \\ Y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur  $I$  tout entier.

**Proposition 40.** Une équation différentielle linéaire homogène  $Y' = AY$  (où  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est constante en  $t$ ) a ses solutions maximales définies sur  $\mathbb{R}$  et le problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = y_0 \end{cases}$$

a pour (unique) solution  $t \mapsto e^{tA}y_0$ .

**Exemple 41.** Les solutions de

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} Y$$

sont les

$$t \mapsto \alpha e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{it} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma e^{-it} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \\ -2 \end{pmatrix}$$

où  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ .

## 2. Équations matricielles

**Lemme 42.** Soit  $\|\cdot\|$  une norme d'algèbre sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , et soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice dont les valeurs propres sont de partie réelle strictement négative. Alors il existe une fonction polynômiale  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\lambda > 0$  tels que  $\|e^{tA}\| \leq e^{-\lambda t} P(t)$ .

[I-P]  
p. 177

[DEV]

**Application 43** (Équation de Sylvester). Soient  $A$  et  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  deux matrices dont les valeurs propres sont de partie réelle strictement négative. Alors pour tout  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , l'équation  $AX + XB = C$  admet une unique solution  $X$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

# Bibliographie

## **Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries**

[C-G]

Philippe CALDERO et Jérôme GERMONI. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome 1*. Calvage & Mounet, 13 mai 2017.

<http://www.calvage-et-mounet.fr/2022/05/09/nouvelles-histoires-hedoniste-de-groupes-et-de-geometrie/>.

## **Mathématiques pour l'agrégation**

[DAN]

Jean-François DANTZER. *Mathématiques pour l'agrégation. Analyse et probabilités*. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332904-mathematiques-pour-l-agregation-analyse-et-probabilites>.

## **Les maths en tête**

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.

## **Les maths en tête**

[GOU21]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 13 juill. 2021.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html>.

## **Algèbre Linéaire**

[GRI]

Joseph GRIFONE. *Algèbre Linéaire*. 6<sup>e</sup> éd. Cépaduès, 9 jan. 2019.

<https://www.cepades.com/livres/algebre-lineaire-edition-9782364936737.html>.

## **L'oral à l'agrégation de mathématiques**

[I-P]

Lucas ISENMANN et Timothée PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements*. 2<sup>e</sup> éd. Ellipses, 26 mars 2024.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html>.

## **Mathématiques pour l'agrégation**

[ROM21]

Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie*. 2<sup>e</sup> éd. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332201-mathematiques-pour-l-agregation-algebre-et-geometrie>.