157 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit $n \geq 1$ un entier.

I - Généralités

1. Espaces $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{H}_n(\mathbb{C})$

[GOU21] p. 243

Notation 1. Soit $M \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. On note

$$M^* = \begin{cases} {}^t M & \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ {}^t \overline{M} & \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}$$

p. 125

Définition 2. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

— On dit que M est **symétrique** si $M^* = M$. On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques à coefficients réels.

— On dit que M est **antisymétrique** si $M^* = -M$. On note $\mathbb{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques à coefficients réels.

p. 240

Proposition 3. (i) $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de dimensions respectives $\frac{n(n+1)}{2}$ et $\frac{n(n-1)}{2}$.

(ii) $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

Définition 4. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que M est **hermitienne** si $M^* = M$. On note $\mathscr{H}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices hermitiennes à coefficients complexes.

Proposition 5.

$$\forall M \in \mathscr{H}_n(\mathbb{C}) \, \exists!(S, A) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } M = S + iA$$

Corollaire 6. $\mathscr{H}_n(\mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de dimension n^2.

2. Positivité

[ROM21] p. 735

Définition 7. Soit $\langle .,. \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{K}^n$.

— Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, une matrice symétrique $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est dite **positive** si

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle x, Mx \rangle \geq 0$$

et elle est dite **définie positive** si l'inégalité précédente est stricte pour tout $x \neq 0$. On note respectivement $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives et définies positives.

— Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ces définitions sont valables. On note respectivement $\mathscr{H}_n^+(\mathbb{C})$ et $\mathscr{H}_n^{++}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices hermitiennes positives et définies positives.

Proposition 8. Soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Alors $M \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).

Corollaire 9. Soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Alors $M \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = {}^tBB$.

Théorème 10 (Critère de Sylvester)**.** Une matrice symétrique est définie positive si et seulement si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs.

Corollaire 11. $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

[I-P] p. 182

Lemme 12. Soit $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Alors,

$$|||S|||_2 = \rho(S)$$

où ρ est l'application qui a une matrice y associe son rayon spectral.

[DEV]

Théorème 13. L'application $\exp : \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

3. Lien avec l'algèbre bilinéaire

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n. [GOU21] p. 239

Définition 14. Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ une application.

— On dit que φ est une **forme bilinéaire** sur E si pour tout $x \in E$, $y \mapsto \varphi(x,y)$ et pour tout $y \in E$, $x \mapsto \varphi(x,y)$ sont linéaires.

— Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on dit que φ est une **forme sesquilinéaire** sur E si pour tout $x \in E$, $y \mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire et pour tout $y \in E$, $x \mapsto \varphi(x,y)$ est antilinéaire (ie. $\forall x,y,z \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\varphi(x+y,z) = \varphi(x,z) + \varphi(y,z)$ et $\varphi(\lambda x, z) = \overline{\lambda}\varphi(x,z)$).

Exemple 15. — Toute forme sesquilinéaire sur E est une forme bilinéaire lorsque E est considéré comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

— L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}([0,1],\mathbb{C})^2 & \to & \mathbb{C} \\ (f,g) & \mapsto & \int_0^1 \overline{f(t)} g(t) \, \mathrm{d}t \end{array}$$

est une forme sesquilinéaire sur $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{C})$.

Définition 16. On définit la matrice d'une forme bilinéaire (ou sesquilinéaire) φ dans une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E par

$$(\varphi(e_i,e_j))_{i,j \in [\![1,n]\!]} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

Remarque 17. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soient $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i \in E$. Soit φ une forme bilinéaire ou sesquilinéaire, dont on note M sa matrice dans le base $\mathscr{B}$. On a :

$$\varphi(x,y) = X^* M Y, \text{ où } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Définition 18. Soit φ une forme bilinéaire sur E. On dit que :

— φ est **symétrique** si $\forall x,y \in E$, $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$.

— φ est **antisymétrique** si $\forall x,y \in E$, $\varphi(x,y) = -\varphi(y,x)$.

— Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on dit que φ est **hermitienne** si $\forall x,y \in E$, $\varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$.

Proposition 19. (i) Une forme bilinéaire est symétrique (resp. antisymétrique) si et seulement si sa matrice dans une base est symétrique (resp. antisymétrique).

(ii) Une forme sesquilinéaire est hermitienne si et seulement si sa matrice dans une base est hermitienne.

Définition 20. On appelle **forme quadratique** sur E toute application q de la forme

$$q : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \varphi(x,x) \end{array}$$

où φ est une forme bilinéaire symétrique sur E.

Proposition 21. Soit q une forme quadratique sur E. Il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ telle que pour tout $x \in E$, $q(x) = \varphi(x,x)$.

φ est alors la **forme polaire** de q, et on a

$$\forall x, y \in E, \varphi(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$$

Exemple 22. La matrice symétrique

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

définit la forme quadratique $q : (x,y,z) \mapsto 3x^2 + y^2 + 2xy - 3xz$.

II - Réductions, décompositions

1. Réductions

Définition 23. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que ${}^tMM = I_n$. p. 254

— Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on dit que M est **orthogonale**. On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales à coefficients réels.

— Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on dit que M est **unitaire**. On note $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices unitaires à coefficients complexes.

Théorème 24 (Spectral)**.** Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $M \in \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$). Alors il existe $C \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ (resp. $C \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$) telle que

$$C^{-1}MC = C^*MC = D$$

où D est une matrice diagonale réelle.

Remarque 25. En reprenant les notations précédentes, cela revient à dire qu'un endomorphisme ayant M pour matrice dans une base est diagonalisable dans une base orthonormée.

Corollaire 26. Soient $M, N \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $M \in \mathscr{H}_n(\mathbb{C})$) définies positives. Alors il existe C inversible telle que

$$C^* M C = I_n \text{ et } C^* N C = D$$

où D est une matrice diagonale réelle.

Application 27. p. 283

$$\forall A, B \in \mathscr{H}_n^{++}(\mathbb{C}), \det(A+B)^{\frac{1}{n}} \geq \det(A)^{\frac{1}{n}} + \det(B)^{\frac{1}{n}}$$

Comme application du Théorème 24, on a les résultats suivants. [ROM21] p. 738

Application 28 (Norme euclidienne sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$)**.** Soit $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. On a

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

Application 29 (Diagonalisation simultanée)**.** Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de matrices symétriques. Alors, il existe $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i \in I$, la matrice ${}^t P A_i P$ est diagonale si et seulement si $A_i A_j = A_j A_i$ pour tout $i \neq j$.

Application 30 (Racine carrée dans $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\mathscr{H}_n^{++}(\mathbb{C})$)**.** [C-G] p. 376

$$\forall A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \, \exists! B \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ telle que } B^2 = A$$

et on a le même résultat en remplaçant $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ par $\mathscr{H}_n^{++}(\mathbb{C})$.

Théorème 31 (Loi d'inertie de Sylvester)**.** Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Alors, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et un unique couple d'entiers (p, q) tels que p. 299

$${}^t PAP = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition 32. Le couple (p, q) précédent est la **signature** de A.

Proposition 33. Soit q une forme quadratique de forme polaire sur $\mathbb{R}^n$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) φ est un produit scalaire.

(ii) q est de signature $(n, 0)$.

(iii) La matrice de φ dans une base de $\mathbb{R}^n$ est de la forme $S = {}^tPP$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

(iv) La matrice de φ dans une base de $\mathbb{R}^n$ est de la forme $S = {}^tPP$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure.

Remarque 34. Soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ de signature (p,q). Alors, p (resp. q) est le nombre de valeurs propres de M strictement positives (resp. strictement négatives). p. 270

Corollaire 35. Soient $A, B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Alors A et B sont congruentes si et seulement si elles sont de même signature.

Application 36. p. 348

$$\{PP^* \mid P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})\} = \begin{cases} \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \mathscr{H}_n^{++}(\mathbb{C}) & \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}$$

2. Décompositions

[DEV] **Application 37** (Décomposition polaire)**.** L'application p. 376

$$\mu : \begin{array}{ccc} \mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \to & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) & \mapsto & OS \end{array}$$

est un homéomorphisme.

Corollaire 38. Tout sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ qui contient $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.

Définition 39. Les **sous-matrices principales** d'une matrice $(a_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont les matrices $A_k = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1,k]\!]} \in \mathscr{M}_k(\mathbb{K})$ où $k \in [\![1,n]\!]$. Les **déterminants principaux** sont les déterminants des matrices A_k, pour $k \in [\![1,n]\!]$. [ROM21] p. 690

Théorème 40 (Décomposition lower-upper)**.** Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors, A admet une décomposition

$$A = LU$$

(où L est une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et U une matrice triangulaire supérieure) si et seulement si tous les déterminants principaux de A sont non nuls. Dans ce cas, une telle décomposition est unique.

Corollaire 41. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \cap \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$. Alors, on a l'unique décomposition de A :

$$A = LD^tL$$

où L est une matrice triangulaire inférieure et D une matrice diagonale.

Application 42 (Décomposition de Cholesky)**.** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors, $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ triangulaire inférieure telle que $A = B^tB$. De plus, une telle décomposition est unique si on impose la positivité des coefficients diagonaux de B.

Exemple 43. On a la décomposition de Cholesky : [GRI] p. 368

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

III - Applications

1. Géométrie différentielle

Lemme 44. Soit $A_0 \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ inversible. Alors il existe un voisinage V de A_0 dans $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et une application $\psi : V \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que [ROU] p. 209

$$\forall A \in V, A = {}^t\psi(A)A_0\psi(A)$$

Lemme 45 (Morse)**.** Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^3$ (où U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine). On suppose : p. 354

— $\mathrm{d}f_0 = 0$.

— La matrice symétrique $\mathrm{Hess}(f)_0$ est inversible.

— La signature de $\mathrm{Hess}(f)_0$ est $(p, n-p)$.

Alors il existe un difféomorphisme $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ de classe $\mathscr{C}^1$ entre deux voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$ $V \subseteq U$ et W tel que $\varphi(0) = 0$ et

$$\forall x \in U, f(x) - f(0) = \sum_{k=1}^{p} \phi_k^2(x) - \sum_{k=p+1}^{n} \phi_k^2(x)$$

Application 46. Soit S la surface d'équation $z = f(x, y)$ où f est de classe $\mathscr{C}^3$ au voisinage de l'origine. On suppose la forme quadratique $\mathrm{d}^2 f_0$ non dégénérée. Alors, en notant P le plan tangent à S en 0 : p. 341

(i) Si $\mathrm{d}^2 f_0$ est de signature $(2,0)$, alors S est au-dessus de P au voisinage de 0.

(ii) Si $\mathrm{d}^2 f_0$ est de signature $(0,2)$, alors S est en-dessous de P au voisinage de 0.

(iii) Si $\mathrm{d}^2 f_0$ est de signature $(1,1)$, alors S traverse P selon une courbe admettant un point double en $(0, f(0))$.

2. Résolution de systèmes linéaires

Proposition 47. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ vérifiant les hypothèses du Théorème 40. On définit la suite (A_k) où $A_0 = A$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, A_{k+1} est la matrice obtenue à partir de A_k à l'aide du pivot de Gauss sur la $(k+1)$-ième colonne. Alors, A_{n-1} est la matrice U de la décomposition $A = LU$ du Théorème 40. [C-G] p. 257

Remarque 48. Pour résoudre un système linéaire $AX = Y$, on se ramène à $A = LU$ en $O\left(\frac{2}{3}n^3\right)$. Puis, on résout deux systèmes triangulaires “en cascade” :

$$LX' = Y \text{ puis } UX = X'$$

ceux-ci demandant chacun $O(2n^2)$ opérations.

Bibliographie

Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries **[C-G]**

Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome 1*. Calvage & Mounet, 13 mai 2017.
http://www.calvage-et-mounet.fr/2022/05/09/nouvelles-histoires-hedoniste-de-groupes-et-de-geometrie/.

Les maths en tête **[GOU21]**

Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités*. 3e éd. Ellipses, 13 juill. 2021.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html.

Algèbre Linéaire **[GRI]**

Joseph Grifone. *Algèbre Linéaire*. 6e éd. Cépaduès, 9 jan. 2019.
https://www.cepadues.com/livres/algebre-lineaire-edition-9782364936737.html.

L'oral à l'agrégation de mathématiques **[I-P]**

Lucas Isenmann et Timothée Pecatte. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements*. 2e éd. Ellipses, 26 mars 2024.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html.

Mathématiques pour l'agrégation **[ROM21]**

Jean-Étienne Rombaldi. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie*. 2e éd. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.
https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332201-mathematiques-pour-l-agregation-algebre-et-geometrie.

Petit guide de calcul différentiel **[ROU]**

François Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel. à l'usage de la licence et de l'agrégation*. 4e éd. Cassini, 27 fév. 2015.
https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/94-petit-guide-de-calcul-differentiel-4e-ed.html.