158 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n. On munit E d'un produit scalaire $\langle ., . \rangle$, qui en fait un **espace euclidien**. On note $\|.\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

I - Conséquences du caractère euclidien de E

1. Adjoint d'un endomorphisme

Lemme 1 (Théorème de représentation de Riesz)**.** [ROM21] p. 718

$$\forall \varphi \in E^*, \exists! a \in E \text{ tel que } \forall x \in E, \varphi(x) = \langle x, a \rangle$$

Théorème 2.

$$\forall u \in \mathscr{L}(E), \exists! u^* \in \mathscr{L}(E) \text{ tel que } \forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$$

Définition 3. Avec les notations du théorème précédent, on dit que u^* est **l'adjoint** de u.

Théorème 4. Soient $\mathscr{B} = (e_i)_{i \in I}$ une base de E et $G = (\langle e_i, e_j \rangle)_{i,j \in [\![1,n]\!]}$ la matrice de Gram correspondante. Si $u \in \mathscr{L}(E)$ a pour matrice A dans la base $\mathscr{B}$, alors la matrice de u^* dans la base $\mathscr{B}$ est

$$B = G^{-1\,t}AG$$

En particulier, si $\mathscr{B}$ est orthonormée, on a $B = {}^tA$.

Proposition 5. p. 748

$$\forall u \in \mathscr{L}(E), |||u||| = |||u^*|||$$

Il en résulte que l'application linéaire (cf. Proposition 6) $u \mapsto u^*$ est continue pour la norme $|||.|||$ subordonnée à $\|.\|$.

2. Propriétés de l'adjoint

Proposition 6 (Propriétés de $u \mapsto u^*$)**.** Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$. On a : p. 719

(i) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, (\lambda u + v)^* = \lambda u^* + v^*$.

(ii) $(u^*)^* = u$.

(iii) $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.

(iv) $u \in \mathrm{GL}(E) \implies u^* \in \mathrm{GL}(E)$, et $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$.

Proposition 7 (Propriétés de l'endomorphisme adjoint)**.** Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On a :

(i) $\det(u^*) = \det(u)$.

(ii) $\mathrm{Ker}(u^*) = \mathrm{Im}(u)^\perp$.

(iii) $\mathrm{Im}(u^*) = \mathrm{Ker}(u)^\perp$.

(iv) $\mathrm{rang}(u^*) = \mathrm{rang}(u)$.

(v) Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.

Proposition 8. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. p. 751

$$u = 0 \iff \mathrm{trace}(u \circ u^*) = 0$$

II - Endomorphismes normaux

Définition 9. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est dit **normal** s'il est tel que $u \circ u^* = u^* \circ u$. p. 743

Remarque 10. En désignant par $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de $u \in \mathscr{L}(E)$ dans une base orthonormée, u est normal si et seulement si,

$$^tAA = A^tA$$

ce qui se traduit en disant que la matrice A est normale.

Exemple 11. Les endomorphismes symétriques, anti-symétriques (Section III) et orthogonaux (Section IV) sont des endomorphismes normaux.

Proposition 12. $u \in \mathscr{L}(E)$ est normal si et seulement si $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$. p. 758

Proposition 13. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme normal. p. 743

(i) Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.

(ii) Il existe un sous-espace vectoriel de E de dimension 1 ou 2 stable par u.

Proposition 14 (Réduction dans le cas $n = 2$)**.** On suppose $n = 2$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme normal.

— Si u a une valeur propre réelle : u est diagonalisable dans une base orthonormée.
— Sinon : il existe $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E telle que la matrice de u dans $\mathscr{B}$ est

$$R(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

avec $b \neq 0$.

Théorème 15 (Réduction des endomorphismes normaux)**.** Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme normal. Alors, il existe $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E telle que la matrice de u dans $\mathscr{B}$ est

$$\begin{pmatrix} D_p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R(a_1,b_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & R(a_2,b_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & R(a_r,b_r) \end{pmatrix}$$

où D_p est diagonale d'ordre p et $R(a,b)$ est définie à la Proposition 14.

III - Endomorphismes symétriques

1. Définitions et propriétés

Définition 16. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est dit **symétrique** s'il est tel que $u^* = u$. p. 732

Proposition 17. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée est symétrique.

Corollaire 18. $\mathscr{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

Proposition 19. Si $u \in \mathscr{S}(E)$, alors $u^p \in \mathscr{S}(E)$ pour tout entier naturel p, et $v^* \circ u \circ v \in \mathscr{S}(E)$ pour tout $v \in \mathscr{L}(E)$.

Théorème 20 (Spectral)**.** Tout endomorphisme symétrique $u \in \mathscr{S}(E)$ se diagonalise dans une base orthonormée.

Corollaire 21. Toute matrice symétrique réelle se diagonalise dans une base orthonormée.

2. Endomorphismes symétriques positifs

Définition 22.
- Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est dit **symétrique positif** (resp. **symétrique défini positif**) s'il est symétrique tel que $\langle x, u(x) \rangle \geq 0$ (resp. $\langle x, u(x) \rangle > 0$) pour tout $x \in E$. On note $\mathscr{S}^+(E)$ (resp. $\mathscr{S}^{++}(E)$) l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs (resp. symétriques définis positifs).
- Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **symétrique positive** (resp. **symétrique définie positive**) si elle est symétrique telle que $\langle x, Ax \rangle \geq 0$ (resp. $\langle x, Ax \rangle > 0$) pour tout $x \in E$. On note $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives (resp. symétriques définies positives).

Théorème 23. Soit $u \in \mathscr{S}(E)$. Alors, $u \in \mathscr{S}^+(E)$ (resp. $u \in \mathscr{S}^{++}(E)$) si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).

Corollaire 24. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors, $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tBB$.

Exemple 25. p. 752

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} P \text{ avec } P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Lemme 26. Soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Alors, [I-P] p. 182

$$|||M||| = \rho(M)$$

où ρ est l'application qui a une matrice y associe son rayon spectral.

[DEV] **Théorème 27.** L'application $\exp : \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

3. Endomorphismes antisymétriques

Définition 28. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est dit **anti-symétrique** s'il est tel que $u^* = -u$. [ROM21] p. 718

Théorème 29. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme anti-symétrique. Alors, les valeurs propres de u sont imaginaires pures (éventuellement nulles) et il existe $\mathscr{B}$ une base orthonormée de p. 746

E telle que la matrice de u dans $\mathscr{B}$ est

$$\begin{pmatrix} D_p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R(0,b_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & R(0,b_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & R(0,b_r) \end{pmatrix}$$

où D_p est diagonale d'ordre p et $R(a,b)$ est définie à la Proposition 14.

IV - Endomorphismes orthogonaux

1. Le groupe orthogonal

Définition 30. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est dit **orthogonal** (ou est une **isométrie**) s'il est tel que $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pour tout $x, y \in E$. On note $\mathscr{O}(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E. p. 720

Exemple 31. — Les seules homothéties qui sont des isométries sont $-\mathrm{id}_E$ et id_E.
— Si $n = 1$, on a $\mathscr{O}(E) = \{\pm \mathrm{id}_E\}$.

Proposition 32. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. p. 743

$$u = \mathscr{O}(E) \iff \forall x \in E,\ \|u(x)\| \iff u \in \mathrm{GL}(E) \text{ et } u^{-1} = u^*$$

Théorème 33. Les isométries sont des automorphismes. Il en résulte que $\mathscr{O}(E)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$. p. 721

Remarque 34. Ce n'est pas vrai en dimension infinie.

Théorème 35. Un endomorphisme de E est une isométrie si et seulement s'il transforme toute base orthonormée de E en une base orthonormée.

Théorème 36. Un endomorphisme de E est une isométrie si et seulement si sa matrice A dans une base orthonormée est inversible, d'inverse ${}^tA$.

On dit alors que A est **orthogonale**.

Notation 37. On note $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales.

Théorème 38.
$$\forall u \in \mathscr{O}(E), \det(u) = \pm 1$$

Remarque 39. On a des résultats équivalents pour les matrices.

Théorème 40 (Réduction des endomorphismes orthogonaux)**.** Soit $u \in \mathscr{O}(E)$. Alors, il existe $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E telle que la matrice de u dans $\mathscr{B}$ est

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -I_q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & R_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & R_r \end{pmatrix}$$

où $R_i = R(\cos(\theta_i), \sin(\theta_i))$ avec $R(a,b)$ définie à la Proposition 14 et $\forall i \in [\![1,r]\!]$, $\theta_i \in]0, 2\pi[$.

[C-G] p. 376

Lemme 41.
$$\forall A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})\, \exists! B \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ telle que } B^2 = A$$

[DEV]

Théorème 42 (Décomposition polaire)**.** L'application

$$\mu : \begin{array}{ccc} \mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \to & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (O,S) & \mapsto & OS \end{array}$$

est un homéomorphisme.

2. Étude en dimensions 2 et 3

[GRI] p. 241

Définition 43. On définit $\mathrm{SO}(E) = \{u \in \mathscr{O}(E) \mid \det(u) = 1\}$ et $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$

[ROM21] p. 724

Proposition 44. $\mathrm{SO}(E)$ est un sous-groupe distingué de $\mathscr{O}(E)$ d'indice 2 (de même que $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$).

[GRI] p. 241

Exemple 45.

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$$

Théorème 46. Soit $A \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$. Alors :

— Si $A \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$:

$$\exists \theta \in \mathbb{R} \text{ tel que } A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

(rotation d'angle θ).

— Si $A \notin \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$:

$$\exists \theta \in \mathbb{R} \text{ tel que } A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

(symétrie orthogonale par rapport à la droite d'angle polaire $\frac{\theta}{2}$).

Théorème 47. Soit $A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique est A. Alors, il existe $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E telle que la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}$$

avec $\epsilon = \pm 1$. On note E_ϵ le sous-espace vectoriel associé à la valeur propre ϵ.

— Si $\epsilon = 1$: $f \in \mathrm{SO}(E)$ est la rotation d'angle $2\cos(\theta) + 1$ autour de l'axe E_1.

— Si $\epsilon = -1$: $f \notin \mathrm{SO}(E)$ est la composée de la rotation d'angle $2\cos(\theta) - 1$ autour de l'axe E_{-1} avec la symétrie orthogonale par rapport à $E_{-1}^{\perp}$.

3. Propriétés topologiques

Proposition 48. $\mathcal{O}(E)$ est une partie compacte de $\mathcal{L}(E)$. **[ROM21]** p. 722

Proposition 49. $\mathrm{SO}(E)$ est connexe dans $\mathcal{O}(E)$.

Corollaire 50. $\mathcal{O}(E)$ est non-connexe. Ses composantes connexes sont $\mathrm{SO}(E)$ et $\{u \in \mathcal{O}(E) \mid \det(u) = -1\}$.

Proposition 51. Tout sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(E)$ qui contient $\mathcal{O}(E)$ est égal à $\mathcal{O}(E)$. p. 756

Annexes

[GRI]
p. 242

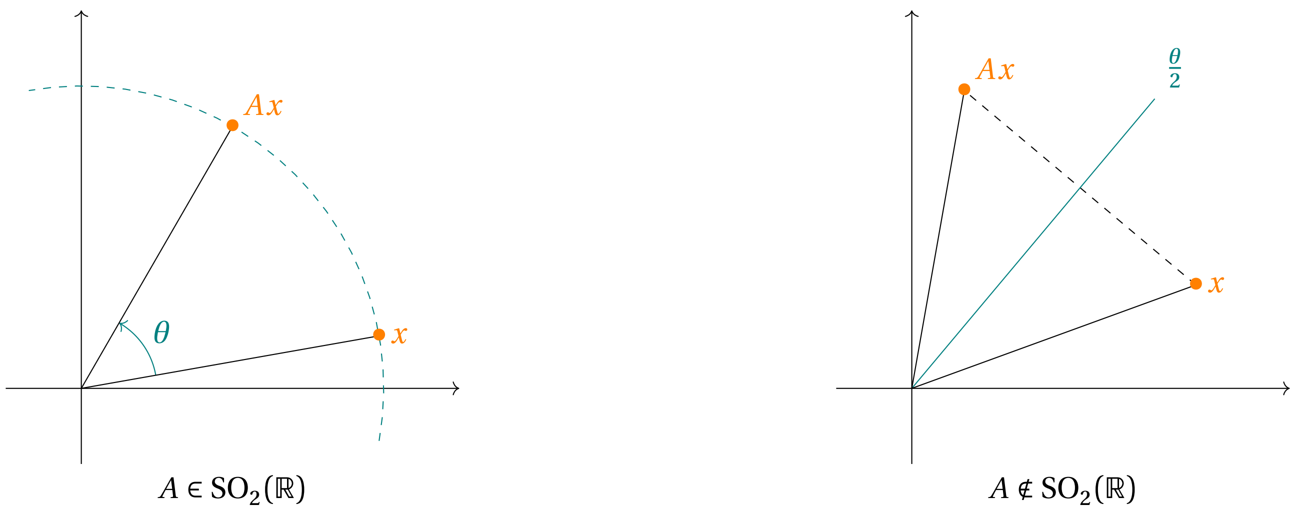

FIGURE 1 – Le groupe $\mathscr{O}_2(\mathbb{R})$

p. 244

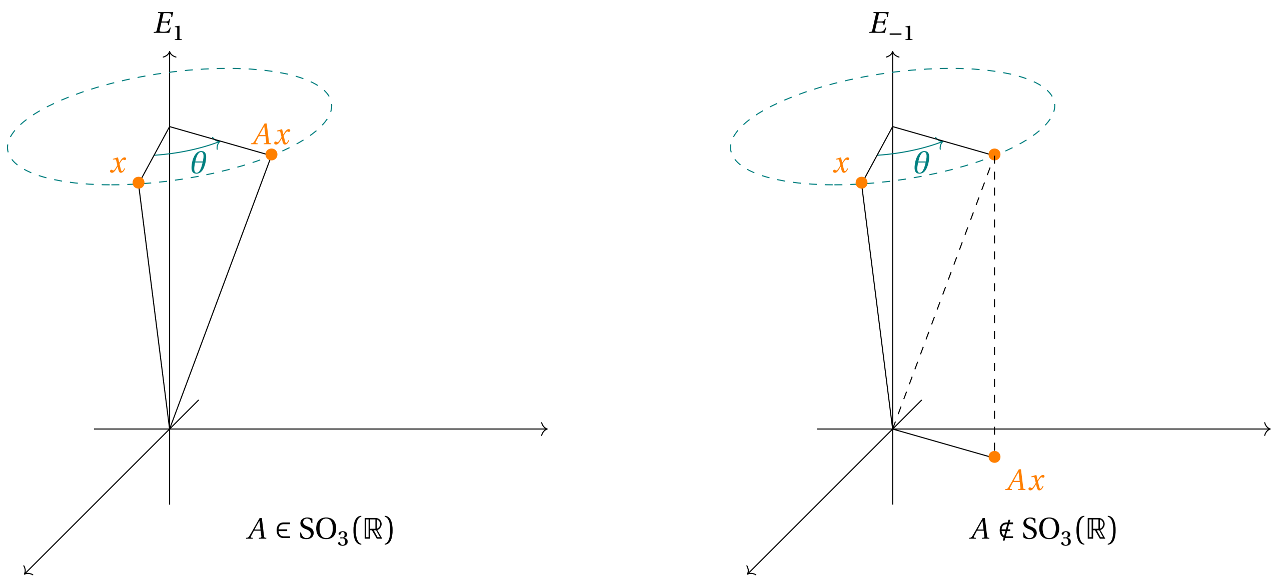

FIGURE 2 – Le groupe $\mathscr{O}_3(\mathbb{R})$

Bibliographie

Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries [C-G]

Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome 1*. Calvage & Mounet, 13 mai 2017.
http://www.calvage-et-mounet.fr/2022/05/09/nouvelles-histoires-hedoniste-de-groupes-et-de-geometrie/.

Algèbre Linéaire [GRI]

Joseph Grifone. *Algèbre Linéaire*. 6e éd. Cépaduès, 9 jan. 2019.
https://www.cepadues.com/livres/algebre-lineaire-edition-9782364936737.html.

L'oral à l'agrégation de mathématiques [I-P]

Lucas Isenmann et Timothée Pecatte. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements*. 2e éd. Ellipses, 26 mars 2024.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html.

Mathématiques pour l'agrégation [ROM21]

Jean-Étienne Rombaldi. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie*. 2e éd. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.
https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332201-mathematiques-pour-l-agregation-algebre-et-geometrie.