170 Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et de dimension finie n.

I - Généralités

1. Définitions

[GOU21] p. 239

Définition 1. Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ une application.

- On dit que φ est une **forme bilinéaire** sur E si pour tout $x \in E$, $y \mapsto \varphi(x,y)$ et pour tout $y \in E$, $x \mapsto \varphi(x,y)$ sont linéaires.
- Si de plus $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$ pour tout $x,y \in E$, on dit que φ est **symétrique**.

Définition 2. On appelle **forme quadratique** sur E toute application q de la forme

$$q : x \mapsto \varphi(x,x)$$

où φ est une forme bilinéaire sur E.

Exemple 3. Sur $\mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto 3x^2 + y^2 + 2xy - 3xz$ définit une forme quadratique.

Proposition 4. Soit q une forme quadratique sur E. Il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ telle que $q(x) = \varphi(x,x)$ pour tout $x \in E$. φ est la **forme polaire** de q, et on a

$$\forall x,y \in E,\ \varphi(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y))$$

p. 248

Exemple 5. Sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $A \mapsto \operatorname{trace}(A)^2$ est une forme quadratique, dont la forme polaire est $(A,B) \mapsto \operatorname{trace}(A)\operatorname{trace}(B)$.

2. Représentation matricielle

p. 229

Définition 6. Soient q une forme quadratique sur E et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On appelle **matrice** de q dans $\mathscr{B}$ la matrice $\mathrm{Mat}(q,\mathscr{B})$ définie par

$$\mathrm{Mat}(q,\mathscr{B}) = (\varphi(e_i,e_j))_{i,j\in[\![1,n]\!]}$$

où φ est la forme polaire de q. Le **rang** de q désigne le rang de cette matrice.

Exemple 7. La matrice de la forme quadratique de l'Exemple 3 est

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition 8. Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E dont on note P la matrice de passage entre ces bases. Soit q une forme quadratique sur E. Alors,

$$\mathrm{Mat}(q,\mathscr{B}) = {}^tP\,\mathrm{Mat}(q,\mathscr{B}')P$$

Remarque 9. En particulier, en reprenant les notations précédentes, $\mathrm{Mat}(q,\mathscr{B})$ et $\mathrm{Mat}(q,\mathscr{B}')$ sont équivalentes : le rang de q est bien défini et ne dépend pas de la base considérée.

II - Orthogonalité et isotropie

Soit q une forme quadratique sur E de forme polaire φ.

1. Définitions et propriétés

Définition 10. — On appelle **cône isotrope** de q l'ensemble

$$C_q = \{x \in E \mid q(x) = 0\}$$

— q est dite **définie** si $C_q = \{0\}$.

— Les vecteurs de C_q sont dits **isotropes** pour q.

Exemple 11. La forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par $(x,y,z) \mapsto 4x^2+3y^2+5xy-3xz+8yz$ n'est pas définie car $(0,0,1)$ est un vecteur isotrope non nul. [GRI] p. 303

Définition 12. — Deux vecteurs $x, y \in E$ sont dits q-**orthogonaux** si $\varphi(x,y) = 0$. On note cela $x \perp y$. [GOU21] p. 242

— Si $A \subseteq E$, on appelle **orthogonal** de A l'ensemble $A^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in A,\ x \perp y\}$.

Proposition 13. (i) Si $A \subseteq E$, $A^\perp = (\mathrm{Vect}(A))^\perp$.
(ii) Si $A \subseteq E$, $A \subseteq A^{\perp\perp}$.
(iii) Si $A \subseteq B \subseteq E$, $B^\perp \subseteq A^\perp$.

Définition 14. — On appelle **noyau** de q le sous-espace vectoriel

$$\mathrm{Ker}(q) = E^\perp$$

— On dit que q est **non-dégénérée** si $\mathrm{Ker}(q) = \{0\}$ et **dégénérée** si $\mathrm{Ker}(q) \neq \{0\}$.

Proposition 15. On a $\mathrm{Ker}(q) \subseteq C_q$. En particulier, si q est définie, alors q est non dégénérée.

Exemple 16. Sur $\mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$ est une forme quadratique non dégénérée mais non définie non plus.

Proposition 17. Soit F un sous-espace vectoriel de E.
(i) $\dim(E) = \dim(F) + \dim(F^\perp) - \dim(F \cap \mathrm{Ker}(q))$.
(ii) $F^{\perp\perp} = F + \mathrm{Ker}(q)$.
(iii) Si la restriction de q à F $q_{|F}$ est définie, alors $E = F \oplus F^\perp$.
(iv) Si q est définie, $F = F^{\perp\perp}$.

Proposition 18. Soit A la matrice de q dans une base $\mathscr{B}$. Alors,

$$\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(q)$$

Corollaire 19. q est non dégénérée si et seulement si $\det(\mathrm{Mat}(q, \mathscr{B})) \neq 0$ pour une base quelconque $\mathscr{B}$ de E. [GRI] p. 296

Exemple 20. Sur $\mathbb{R}^4$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ est non dégénérée (car de déterminant -1).

2. Bases q-orthogonales

Définition 21. Une base de E est dite **q-orthogonale** si ses vecteurs sont deux à deux q-orthogonaux. [GOU21] p. 243

Remarque 22. Si $(e_1,\dots,e_n)$ est une base q-orthogonale, alors

$$\forall (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n,\ q\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right)=\sum_{i=1}^n x_i^2 q(e_i)$$

Théorème 23. Il existe une base q-orthogonale de E.

Remarque 24. Si $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ est une base q-orthogonale, en posant $\lambda_i=q(e_i)$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on a

$$\forall x\in E,\ q(x)=q\left(\sum_{i=1}^n e_i^*(x)e_i\right)=\sum_{i=1}^n \lambda_i(e_i^*(x))^2$$

où $(e_1^*,\dots,e_n^*)$ est la base duale de $\mathscr{B}$.

Théorème 25 (Méthode de Gauss)**.** On écrit

$$q(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^n a_{i,i}x_i^2+\sum_{1\le i<j\le n} a_{i,j}x_ix_j$$

et on cherche à écrire q comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes. On a deux cas :

(i) Il existe $i\in[\![1,n]\!]$ tel que $a_{i,i}\neq 0$. On peut suppose $i=1$, on pose alors $a=a_{1,1}$. On réécrit q sous la forme :

$$\begin{aligned} q(x_1,\dots,x_n)&=ax_1^2+x_1B(x_2,\dots,x_n)+C(x_2,\dots,x_n)\\ &=a\left(x_1+\frac{B(x_2,\dots,x_n)}{2a}\right)^2+\left(C(x_2,\dots,x_n)-\frac{B(x_2,\dots,x_n)^2}{4a}\right)\end{aligned}$$

où B est une forme linéaire et C une forme quadratique. On itère alors le procédé avec $C-\frac{B^2}{4a}$.

(ii) Sinon. Si $q=0$, c'est terminé. Sinon, il existe un $a_{i,j}$ non nul. On peut suppose $(i,j)=(1,2)$, on pose alors $a=a_{1,2}$. On réécrit q sous la forme :

$$q(x_1,\dots,x_n)=ax_1x_2+x_1B(x_3,\dots,x_n)+x_2C(x_3,\dots,x_n)+D(x_3,\dots,x_n)$$

où B et C sont des formes linéaires et D une forme quadratique. En utilisant une identité remarquable :

$$\begin{aligned} q&=a\left(x_1+\frac{C}{a}\right)\left(x_2+\frac{B}{a}\right)+\left(D-\frac{BA}{a}\right)\\ &=\frac{a}{4}\left(\left(x_1+x_2+\frac{B+C}{a}\right)^2-\left(x_1-x_2+\frac{C-B}{a}\right)^2\right)+\left(D-\frac{BC}{a}\right)\end{aligned}$$

On itère alors le procédé avec $D - \frac{BC}{a}$.

Exemple 26. Sur $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} q(x,y,z) &= x^2 - 2y^2 + xz + yz \\ &= \left(x + \frac{z}{2}\right)^2 - \frac{z^2}{4} - 2y^2 + yz \\ &= \left(x + \frac{z}{2}\right)^2 - 2\left(y - \frac{z}{4}\right)^2 + \frac{z^2}{8} - \frac{z^2}{4} \\ &= \left(x + \frac{z}{2}\right)^2 - 2\left(y - \frac{z}{4}\right)^2 - \frac{z^2}{8} \end{aligned}$$

III - Classification des formes quadratiques

Soit q une forme quadratique sur E.

1. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Théorème 27. Il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que, si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$, on a [GRI] p. 308

$$q(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Remarque 28. En reprenant les notations précédentes,

$$\mathrm{Mat}(q, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où r est le rang de q et I_r la matrice identité de taille r.

Corollaire 29. Il existe une base q-orthonormée (ie. $q(e_i) = 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$) si et seulement si $\mathrm{rang}(q) = n$ (ie. q est non dégénérée).

2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Définition 30. q est dite **positive** (resp. **négative**) si pour tout $x \in E$, $q(x) \geq 0$ (resp. $q(x) \leq 0$). [GOU21] p. 246

[DEV]

Théorème 31 (Loi d'inertie de Sylvester)**.**

$$\exists p, q \in \mathbb{N} \text{ et } \exists f_1, \dots, f_{p+q} \in E^* \text{ tels que } q = \sum_{i=1}^{p} |f_i|^2 - \sum_{i=p+1}^{q} |f_i|^2$$

où les formes linéaires f_i sont linéairement indépendantes et où $p+q \leq n$. De plus, ces entiers ne dépendent que de q et pas de la décomposition choisie.

Le couple (p,q) est la **signature** de q et le rang q est égal à $p+q$.

Remarque 32. En reprenant les notations précédentes, il existe donc une base $\mathscr{B}$ telle que

$$\operatorname{Mat}(q, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où r est le rang de q et I_r la matrice identité de taille r.

Corollaire 33. On note $\operatorname{sign}(q)$ la signature de q. [GRI] p. 310

(i) q est définie positive si et seulement si $\operatorname{sign}(q) = (n,0)$ si et seulement s'il existe des bases q-orthonormées.

(ii) q est définie négative si et seulement si $\operatorname{sign}(q) = (0,n)$.

(iii) q est non dégénérée si et seulement si $\operatorname{sign}(q) = (p, n-p)$.

Exemple 34. En reprenant l'Exemple 26, on a $\operatorname{sign}(q) = (1,2)$: q est de rang 3. [GOU21] p. 247

Proposition 35. Si q est définie, alors ou bien q est positive, ou bien q est négative.

3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{p^n}$

On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{p^n}$ où $p, n \in \mathbb{N}$ avec p premier.

Définition 36. On appelle **discriminant** de q le déterminant de sa matrice dans une base de E. [PER] p. 130

Théorème 37. Soit $\alpha \in \mathbb{F}_{p^n}$ un non-résidu quadratique modulo p^n. Alors, on a deux classes d'équivalence de formes quadratiques non dégénérées sur E, de matrices congrues à :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

q est de l'un ou l'autre type suivant que son discriminant est, ou non, un carré de $\mathbb{F}_{p^n}$.

IV - Applications

1. Produit scalaire

On suppose de nouveau $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Définition 38. On appelle **produit scalaire** sur E la forme polaire d'une forme quadratique définie positive. [GOU21] p. 252

Proposition 39 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** Soit q une forme quadratique positive sur E de forme polaire φ. Alors, p. 246

$$\forall x, y \in E, \varphi(x,y)^2 \leq q(x)q(y)$$

Si de plus q est définie, il y a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Proposition 40 (Inégalité de Minkowski)**.** Soit q une forme quadratique positive sur E. Alors,

$$\forall x, y \in E, \sqrt{q(x+y)} \leq \sqrt{q(x)}\sqrt{q(y)}$$

Corollaire 41. Soit φ un produit scalaire sur E. Alors,

$$\|.\|_\varphi : x \mapsto \sqrt{\varphi(x,x)}$$

est une norme sur E.

Proposition 42 (Identité du parallélogramme)**.** En reprenant les notations précédentes, [LI] p. 62

$$\forall x, y \in E, \|x+y\|_\varphi^2 + \|x-y\|_\varphi^2 = 2(\|x\|_\varphi^2 \|y\|_\varphi^2)$$

et cette identité caractérise les normes issues d'un produit scalaire.

2. Racines de polynômes

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n. [C-G] p. 356

Notation 43. On note :

— $x_1, \dots, x_t$ les racines complexes de P de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_t$.

— $s_0 = n$ et $\forall k \geq 1$, $s_k = \sum_{i=1}^{t} m_i x_i^k$.

Proposition 44. $\sigma = \sum_{i,j \in [\![0,n-1]\!]} s_{i+j} X_i X_j$ définit une forme quadratique sur $\mathbb{C}^n$ ainsi qu'une forme quadratique $\sigma_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}^n$.

[DEV] **Théorème 45** (Formes de Hankel)**.** On note (p,q) la signature de $\sigma_{\mathbb{R}}$, on a :

— $t = p + q$.

— Le nombre de racines réelles distinctes de P est $p - q$.

3. En analyse

Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert.

Lemme 46. Soit $A_0 \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ inversible. Alors il existe un voisinage V de A_0 dans $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et une application $\psi : V \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que [ROU] p. 209

$$\forall A \in V, A = {}^t\psi(A) A_0 \psi(A)$$

Lemme 47 (Morse)**.** Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^3$ (où U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine). On suppose : p. 354

— $\mathrm{d}f_0 = 0$.

— La matrice symétrique $\mathrm{Hess}(f)_0$ est inversible.

— La signature de $\mathrm{Hess}(f)_0$ est $(p, n-p)$.

Alors il existe un difféomorphisme $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ de classe $\mathscr{C}^1$ entre deux voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$ $V \subseteq U$ et W tel que $\varphi(0) = 0$ et

$$\forall x \in U, f(x) - f(0) = \sum_{k=1}^{p} \phi_k^2(x) - \sum_{k=p+1}^{n} \phi_k^2(x)$$

Application 48. Soit S la surface d'équation $z = f(x,y)$ où f est de classe $\mathscr{C}^3$ au voisinage de l'origine. On suppose la forme quadratique $\mathrm{d}^2 f_0$ non dégénérée. Alors, en notant P le plan tangent à S en 0 : p. 341

(i) Si $\mathrm{d}^2 f_0$ est de signature $(2,0)$, alors S est au-dessus de P au voisinage de 0.

(ii) Si $\mathrm{d}^2 f_0$ est de signature $(0,2)$, alors S est en-dessous de P au voisinage de 0.

(iii) Si $\mathrm{d}^2 f_0$ est de signature $(1,1)$, alors S traverse P selon une courbe admettant un point double en $(0, f(0))$.

Bibliographie

Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries **[C-G]**

Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome 1*. Calvage & Mounet, 13 mai 2017.
`http://www.calvage-et-mounet.fr/2022/05/09/nouvelles-histoires-hedoniste-de-groupes-et-de-geometrie/`.

Les maths en tête **[GOU21]**

Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités*. 3e éd. Ellipses, 13 juill. 2021.
`https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html`.

Algèbre Linéaire **[GRI]**

Joseph Grifone. *Algèbre Linéaire*. 6e éd. Cépaduès, 9 jan. 2019.
`https://www.cepadues.com/livres/algebre-lineaire-edition-9782364936737.html`.

Cours d'analyse fonctionnelle **[LI]**

Daniel Li. *Cours d'analyse fonctionnelle. avec 200 exercices corrigés*. Ellipses, 3 déc. 2013.
`https://www.editions-ellipses.fr/accueil/6558-cours-danalyse-fonctionnelle-avec-200-exercices-corriges-9782729883058.html`.

Cours d'algèbre **[PER]**

Daniel Perrin. *Cours d'algèbre. pour l'agrégation*. Ellipses, 15 fév. 1996.
`https://www.editions-ellipses.fr/accueil/7778-18110-cours-d-algebre-agregation-9782729855529.html`.

Petit guide de calcul différentiel **[ROU]**

François Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel. à l'usage de la licence et de l'agrégation*. 4e éd. Cassini, 27 fév. 2015.
`https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/94-petit-guide-de-calcul-differentiel-4e-ed.html`.