

171 Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} de dimension finie n .

I - Formes quadratiques réelles

1. Définitions

Définition 1. Soit $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ une application.

- On dit que φ est une **forme bilinéaire** sur E si pour tout $x \in E$, $y \mapsto \varphi(x, y)$ et pour tout $y \in E$, $x \mapsto \varphi(x, y)$ sont linéaires.
- Si de plus $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ pour tout $x, y \in E$, on dit que φ est **symétrique**.

[GOU21]
p. 239

Définition 2. On appelle **forme quadratique** sur E toute application q de la forme

$$q : x \mapsto \varphi(x, x)$$

où φ est une forme bilinéaire sur E .

Exemple 3. Sur \mathbb{R}^3 , $(x, y, z) \mapsto 3x^2 + y^2 + 2xy - 3xz$ définit une forme quadratique.

Proposition 4. Soit q une forme quadratique sur E . Il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ telle que $q(x) = \varphi(x, x)$ pour tout $x \in E$. φ est la **forme polaire** de q , et on a

$$\forall x, y \in E, \varphi(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y))$$

Exemple 5. Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A \mapsto \text{trace}(A)^2$ est une forme quadratique, dont la forme polaire est $(A, B) \mapsto \text{trace}(A)\text{trace}(B)$.

p. 248

2. Représentation matricielle

Définition 6. Soient q une forme quadratique sur E et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On appelle **matrice** de q dans \mathcal{B} la matrice $\text{Mat}(q, \mathcal{B})$ définie par

$$\text{Mat}(q, \mathcal{B}) = (\varphi(e_i, e_j))_{i, j \in [1, n]}$$

p. 229

où φ est la forme polaire de q . Le **rang** de q désigne le rang de cette matrice.

Exemple 7. La matrice de la forme quadratique de l'Exemple 3 est

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition 8. Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E dont on note P la matrice de passage entre ces bases. Soit q une forme quadratique sur E . Alors,

$$\text{Mat}(q, \mathcal{B}) = {}^t P \text{Mat}(q, \mathcal{B}') P$$

Remarque 9. En particulier, en reprenant les notations précédentes, $\text{Mat}(q, \mathcal{B})$ et $\text{Mat}(q, \mathcal{B}')$ sont équivalentes : le rang de q est bien défini et ne dépend pas de la base considérée.

II - Orthogonalité et isotropie

Soit q une forme quadratique sur E de forme polaire φ .

1. Définitions et propriétés

Définition 10. — On appelle **cône isotrope** de q l'ensemble

$$C_q = \{x \in E \mid q(x) = 0\}$$

- q est dite **définie** si $C_q = \{0\}$.
- Les vecteurs de C_q sont dits **isotropes** pour q .

Exemple 11. La forme quadratique définie sur \mathbb{R}^3 par $(x, y, z) \mapsto 4x^2 + 3y^2 + 5xy - 3xz + 8yz$ n'est pas définie car $(0, 0, 1)$ est un vecteur isotrope non nul.

[GRI]
p. 303

Définition 12. — Deux vecteurs $x, y \in E$ sont dits **q -orthogonaux** si $\varphi(x, y) = 0$. On note cela $x \perp y$.

- Si $A \subseteq E$, on appelle **orthogonal** de A l'ensemble $A^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in A, x \perp y\}$.

[GOU21]
p. 242

Proposition 13. (i) Si $A \subseteq E$, $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$.

(ii) Si $A \subseteq E$, $A \subseteq A^{\perp\perp}$.

(iii) Si $A \subseteq B \subseteq E$, $B^\perp \subseteq A^\perp$.

Définition 14. — On appelle **noyau** de q le sous-espace vectoriel

$$\text{Ker}(q) = E^\perp$$

— On dit que q est **non-dégénérée** si $\text{Ker}(q) = \{0\}$ et **dégénérée** si $\text{Ker}(q) \neq \{0\}$.

Proposition 15. On a $\text{Ker}(q) \subseteq C_q$. En particulier, si q est définie, alors q est non dégénérée.

Exemple 16. Sur \mathbb{R}^2 , $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$ est une forme quadratique non dégénérée mais non définie non plus.

Proposition 17. Soit F un sous-espace vectoriel de E .

- (i) $\dim(E) = \dim(F) + \dim(F^\perp) - \dim(F \cap \text{Ker}(q))$.
- (ii) $F^{\perp\perp} = F + \text{Ker}(q)$.
- (iii) Si la restriction de q à F $q|_F$ est définie, alors $E = F \oplus F^\perp$.
- (iv) Si q est définie, $F = F^{\perp\perp}$.

Proposition 18. Soit A la matrice de q dans une base \mathcal{B} . Alors,

$$\text{Ker}(A) = \text{Ker}(q)$$

Corollaire 19. q est non dégénérée si et seulement si $\det(\text{Mat}(q, \mathcal{B})) \neq 0$ pour une base quelconque \mathcal{B} de E .

[GRI]
p. 296

Exemple 20. Sur \mathbb{R}^4 , $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ est non dégénérée (car de déterminant -1).

III - Classification

1. Bases orthogonales

Définition 21. Une base de E est dite **q -orthogonale** si ses vecteurs sont deux à deux q -orthogonaux.

[GOU21]
p. 243

Remarque 22. Si (e_1, \dots, e_n) est une base q -orthogonale, alors

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, q\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i^2 q(e_i)$$

Théorème 23. Il existe une base q -orthogonale de E .

Remarque 24. Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base q -orthogonale, en posant $\lambda_i = q(e_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$\forall x \in E, q(x) = q\left(\sum_{i=1}^n e_i^*(x) e_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (e_i^*(x))^2$$

où (e_1^*, \dots, e_n^*) est la base duale de \mathcal{B} .

2. Algorithme de Gauss

Théorème 25 (Méthode de Gauss). On écrit

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j$$

et on cherche à écrire q comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes. On a deux cas :

- (i) Il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $a_{i,i} \neq 0$. On peut supposer $i = 1$, on pose alors $a = a_{1,1}$. On réécrit q sous la forme :

$$\begin{aligned} q(x_1, \dots, x_n) &= a x_1^2 + x_1 B(x_2, \dots, x_n) + C(x_2, \dots, x_n) \\ &= a \left(x_1 + \frac{B(x_2, \dots, x_n)}{2a} \right)^2 + \left(C(x_2, \dots, x_n) - \frac{B(x_2, \dots, x_n)^2}{4a} \right) \end{aligned}$$

où B est une forme linéaire et C une forme quadratique. On itère alors le procédé avec $C - \frac{B^2}{4a}$.

- (ii) Sinon. Si $q = 0$, c'est terminé. Sinon, il existe un $a_{i,j}$ non nul. On peut supposer $(i, j) = (1, 2)$, on pose alors $a = a_{1,2}$. On réécrit q sous la forme :

$$q(x_1, \dots, x_n) = a x_1 x_2 + x_1 B(x_3, \dots, x_n) + x_2 C(x_3, \dots, x_n) + D(x_3, \dots, x_n)$$

où B et C sont des formes linéaires et D une forme quadratique. En utilisant une

identité remarquable :

$$\begin{aligned} q &= a \left(x_1 + \frac{C}{a} \right) \left(x_2 + \frac{B}{a} \right) + \left(D - \frac{BA}{a} \right) \\ &= \frac{a}{4} \left(\left(x_1 + x_2 + \frac{B+C}{a} \right)^2 - \left(x_1 - x_2 + \frac{C-B}{a} \right)^2 \right) + \left(D - \frac{BC}{a} \right) \end{aligned}$$

On itère alors le procédé avec $D - \frac{BC}{a}$.

Exemple 26. Sur \mathbb{R}^3 ,

$$\begin{aligned} q(x, y, z) &= x^2 - 2y^2 + xz + yz \\ &= \left(x + \frac{z}{2} \right)^2 - \frac{z^2}{4} - 2y^2 + yz \\ &= \left(x + \frac{z}{2} \right)^2 - 2 \left(y - \frac{z}{4} \right)^2 + \frac{z^2}{8} - \frac{z^2}{4} \\ &= \left(x + \frac{z}{2} \right)^2 - 2 \left(y - \frac{z}{4} \right)^2 - \frac{z^2}{8} \end{aligned}$$

3. Signature

Définition 27. q est dite **positive** (resp. **négative**) si pour tout $x \in E$, $q(x) \geq 0$ (resp. $q(x) \leq 0$).

Théorème 28 (Loi d'inertie de Sylvester).

$$\exists p, q \in \mathbb{N} \text{ et } \exists f_1, \dots, f_{p+q} \in E^* \text{ tels que } q = \sum_{i=1}^p |f_i|^2 - \sum_{i=p+1}^q |f_i|^2$$

où les formes linéaires f_i sont linéairement indépendantes et où $p + q \leq n$. De plus, ces entiers ne dépendent que de q et pas de la décomposition choisie.

Le couple (p, q) est la **signature** de q et le rang q est égal à $p + q$.

Remarque 29. En reprenant les notations précédentes, il existe donc une base \mathcal{B} telle que

$$\text{Mat}(q, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où r est le rang de q et I_r la matrice identité de taille r .

[DEV]

Corollaire 30. On note $\text{sign}(q)$ la signature de q .

- (i) q est définie positive si et seulement si $\text{sign}(q) = (n, 0)$ si et seulement s'il existe des bases q -orthonormées.
- (ii) q est définie négative si et seulement si $\text{sign}(q) = (0, n)$.
- (iii) q est non dégénérée si et seulement si $\text{sign}(q) = (p, n - p)$.

Exemple 31. En reprenant l'Exemple 26, on a $\text{sign}(q) = (1, 2)$: q est de rang 3.

[GOU21]
p. 247

Proposition 32. Si q est définie, alors ou bien q est positive, ou bien q est négative.

IV - Applications

1. Coniques

On suppose $E = \mathbb{R}^2$ et muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

[GRI]
p. 427

a. Aspect algébrique

Définition 33. On appelle **conique** un ensemble

$$\mathcal{C} = \{v \in E \mid q(v) + \varphi(v) = k, k \in \mathbb{R}\}$$

où q est une forme quadratique non nulle et φ une forme linéaire sur E .

On gardera les notations de cette définition pour la suite.

Remarque 34. — En changeant éventuellement le signe des deux membres de l'équation, on peut supposer que la signature de q est $(2, 0)$, $(1, 1)$ ou $(1, 0)$.

— Si (e_1, e_2) est la base de E , avec $v = xe_1 + ye_2$, on trouve que l'équation d'une conique est du type

$$\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \lambda x + \mu y = k, k \in \mathbb{R}$$

Proposition 35. Il existe une base orthogonale (v_1, v_2) pour q et $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dans cette base, l'équation de la conique est du type

$$ax^2 + by^2 - 2rx - 2sy = k, k \in \mathbb{R} \tag{E}$$

Définition 36. En reprenant les notations précédentes, les directions définies par v_1 et v_2 sont appelés **directions principales** de la conique.

Théorème 37 (Classification des coniques). (i) Si q est non dégénérée : On peut réécrire l'équation (E) de manière équivalente sous la forme

$$ax^2 + by^2 = h$$

avec $a, b, h \in \mathbb{R}$.

- Si $\text{sign}(q) = (2, 0)$: si $h = 0$, \mathcal{C} se réduit à un point; si $h < 0$, $\mathcal{C} = \emptyset$. Supposons que $h > 0$, alors \mathcal{C} est une ellipse, de centre $(\frac{r}{a}, \frac{s}{b})$.
- Si $\text{sign}(q) = (1, 1)$: si $h \neq 0$, \mathcal{C} est une hyperbole. Si $h = 0$, \mathcal{C} se réduit aux deux droites d'équation $y = \pm \sqrt{|\frac{a}{b}|}x$.

(ii) Si q est dégénérée : On a $ab = 0$ et $\text{sign}(q) = (1, 0)$; on peut réécrire l'équation (E) de manière équivalente sous la forme

$$a\left(x - \frac{r}{a}\right)^2 - 2sy = h$$

avec $h \in \mathbb{R}$.

- Si $s \neq 0$: \mathcal{C} est une parabole.
- Si $s = 0$: si $h = 0$, \mathcal{C} se réduit à la droite $x = 0$; si $h < 0$, $\mathcal{C} = \emptyset$. Supposons que $h > 0$, alors \mathcal{C} est constituée des deux droites parallèles d'équation $x = \pm h$.

b. Aspect géométrique

Proposition 38. En se plaçant dans le plan affine \mathbb{R}^2 , plongé dans \mathbb{R}^3 , une conique est l'intersection d'un cône est d'un plan.

[ROM21]
p. 494

2. En analyse

Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert.

a. Optimisation

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 sur U .

Théorème 39. On suppose $df_a = 0$ (a est un **point critique** de f). Alors :

- (i) Si f admet un minimum (resp. maximum) relatif en a , $\text{Hess}(f)_a$ est positive (resp. négative).
- (ii) Si $\text{Hess}(f)_a$ définit une forme quadratique définie positive (resp. définie négative), f admet un minimum (resp. maximum) relatif en a .

[GOU20]
p. 336

Exemple 40. On suppose $df_a = 0$. On pose $(r, s, t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f \right)_{i+j=2}$. Alors :

- (i) Si $rt - s^2 > 0$ (resp. < 0), f admet un minimum (resp. maximum) relatif en a .
- (ii) Si $rt - s^2 < 0$ (resp. < 0), f n'a pas d'extremum en a .
- (iii) Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut rien conclure.

Exemple 41. La fonction $(x, y) \mapsto x^4 + y^2 - 2(x - y)^2$ a trois points critiques qui sont des minimum locaux : $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Contre-exemple 42. $x \mapsto x^3$ a sa hessienne positive en 0, mais n'a pas d'extremum en 0.

b. Homéomorphismes

Lemme 43. Soit $A_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ inversible. Alors il existe un voisinage V de A_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et une application $\psi : V \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe \mathcal{C}^1 telle que

$$\forall A \in V, A = {}^t \psi(A) A_0 \psi(A)$$

[ROU]
p. 209

Lemme 44 (Morse). Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^3 (où U désigne un ouvert de \mathbb{R}^n contenant l'origine). On suppose :

- $df_0 = 0$.
- La matrice symétrique $\text{Hess}(f)_0$ est inversible.
- La signature de $\text{Hess}(f)_0$ est $(p, n - p)$.

Alors il existe un difféomorphisme $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ de classe \mathcal{C}^1 entre deux voisinages de l'origine de \mathbb{R}^n $V \subseteq U$ et W tel que $\phi(0) = 0$ et

$$\forall x \in U, f(x) - f(0) = \sum_{k=1}^p \phi_k^2(x) - \sum_{k=p+1}^n \phi_k^2(x)$$

p. 354

Application 45. Soit S la surface d'équation $z = f(x, y)$ où f est de classe \mathcal{C}^3 au voisinage de l'origine. On suppose la forme quadratique $d^2 f_0$ non dégénérée. Alors, en notant P le plan tangent à S en 0 :

- (i) Si $d^2 f_0$ est de signature $(2, 0)$, alors S est au-dessus de P au voisinage de 0.
- (ii) Si $d^2 f_0$ est de signature $(0, 2)$, alors S est en-dessous de P au voisinage de 0.
- (iii) Si $d^2 f_0$ est de signature $(1, 1)$, alors S traverse P selon une courbe admettant un point double en $(0, f(0))$.

p. 341

3. Racines de polynômes

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n .

[C-G]
p. 356

Notation 46. On note :

- x_1, \dots, x_t les racines complexes de P de multiplicités respectives m_1, \dots, m_t .
- $s_0 = n$ et $\forall k \geq 1, s_k = \sum_{i=1}^t m_i x_i^k$.

Proposition 47. $\sigma = \sum_{i,j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket} s_{i+j} X_i X_j$ définit une forme quadratique sur \mathbb{C}^n ainsi qu'une forme quadratique $\sigma_{\mathbb{R}}$ sur \mathbb{R}^n .

[DEV] **Théorème 48** (Formes de Hankel). On note (p, q) la signature de $\sigma_{\mathbb{R}}$, on a :

- $t = p + q$.
- Le nombre de racines réelles distinctes de P est $p - q$.

Annexes

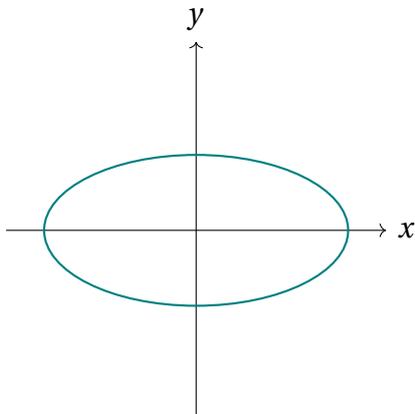


FIGURE 1 – Une ellipse ($\text{sign}(q) = (2, 0)$)

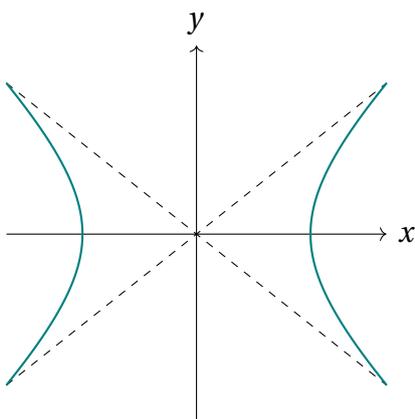


FIGURE 2 – Une hyperbole ($\text{sign}(q) = (1, 1)$)

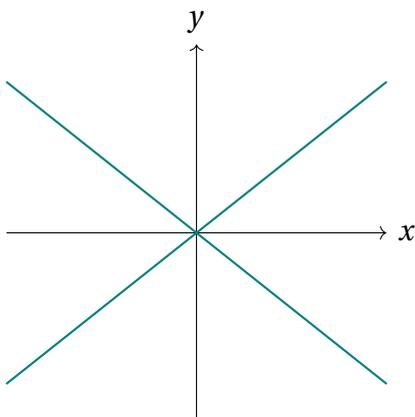
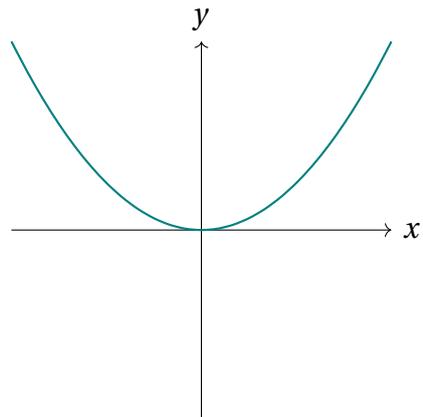
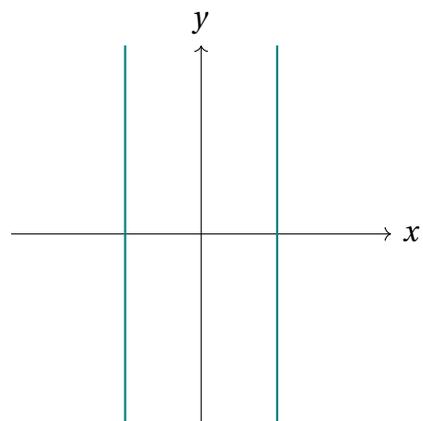


FIGURE 3 – Une hyperbole dégénérée en deux droites sécantes ($\text{sign}(q) = (1, 1)$)

FIGURE 4 – Une parabole ($\text{sign}(q) = (1, 0)$)FIGURE 5 – Une parabole dégénérée en deux droites parallèles ($\text{sign}(q) = (1, 0)$)

Bibliographie

Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries

[C-G]

Philippe CALDERO et Jérôme GERMONI. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome 1*. Calvage & Mounet, 13 mai 2017.

<http://www.calvage-et-mounet.fr/2022/05/09/nouvelles-histoires-hedoniste-de-groupes-et-de-geometrie/>.

Les maths en tête

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3^e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.

Les maths en tête

[GOU21]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités*. 3^e éd. Ellipses, 13 juill. 2021.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html>.

Algèbre Linéaire

[GRI]

Joseph GRIFONE. *Algèbre Linéaire*. 6^e éd. Cépaduès, 9 jan. 2019.

<https://www.cephadues.com/livres/algebre-lineaire-edition-9782364936737.html>.

Mathématiques pour l'agrégation

[ROM21]

Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie*. 2^e éd. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332201-mathematiques-pour-l-agregation-algebre-et-geometrie>.

Petit guide de calcul différentiel

[ROU]

François ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel. à l'usage de la licence et de l'agrégation*. 4^e éd. Cassini, 27 fév. 2015.

<https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/94-petit-guide-de-calcul-differentiel-4e-ed.html>.