

# 191 Exemples d'utilisation de techniques d'algèbre en géométrie.

## I - Utilisation des nombres complexes

On se place dans un plan affine euclidien  $\mathcal{P}$  muni d'un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ .

### 1. Module, argument

**Théorème 1.** L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\mapsto x + iy \end{aligned}$$

est une bijection.

[ROM21]  
p. 97

En utilisant cette identification entre  $\mathcal{P}$  et  $\mathbb{C}$ , on peut identifier tout point du plan à un nombre complexe.

**Théorème 2.** Soient  $A$  et  $B$  deux points dont on note  $a$  et  $b$  les complexes associés.

- (i)  $|a| = OA$ .
- (ii)  $|b - a| = AB$ .
- (iii) Soit  $r \in \mathbb{R}_*^+$ . L'ensemble des nombres complexes  $z$  tels que  $|z - a| = r$  (resp.  $|z - a| < r$  /  $|z - a| \leq r$ ) est le cercle (resp. le disque ouvert / fermé) de centre  $A$  et de rayon  $r$ .
- (iv) Un point  $M$  d'affixe  $z$  est sur la médiatrice de  $[AB]$  si et seulement si  $|z - a| = |z - b|$ .

**Proposition 3** (Inégalité triangulaire). Soient  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}^*$  avec  $n \geq 2$ , on a

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$$

l'égalité étant réalisée si et seulement si  $z_1, \dots, z_n$  sont linéairement liés.

*Remarque 4.* En reprenant les notations précédentes, et en désignant par  $M_1, \dots, M_n$  les points associés aux complexes  $z_1, \dots, z_n$ , l'égalité

$$\left\| \sum_{k=1}^n \overrightarrow{OM_k} \right\| = \sum_{k=1}^n \|\overrightarrow{OM_k}\|$$

est équivalente à dire que les points  $O, M_1, \dots, M_n$  sont alignés.

**Théorème 5.** Si  $z$  est un nombre complexe de module 1, il existe un unique réel  $\theta \in [-\pi, \pi[$  tel que

$$z = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

**Définition 6.** On dit qu'un réel  $\theta$  est un **argument** du nombre complexe  $z$  non nul si

$$\frac{z}{|z|} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

**Théorème 7.** Soient  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  deux vecteurs non nuls du plan. On note  $z_1$  et  $z_2$  les complexes associés.

- (i) Si  $\theta_1$  est un argument de  $z_1$ , alors c'est également une mesure de l'angle orienté  $(\vec{i}, \vec{v}_1)$ .
- (ii) Un argument de  $\frac{z_2}{z_1}$  est une mesure de l'angle orienté  $\theta = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$  et on a :

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle}{\|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\|} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2)}{\|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\|}$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire canonique.

## 2. Le triangle dans le plan complexe

**Définition 8.** Un **vrai triangle** dans le plan  $\mathcal{P}$  est la donnée de trois points non alignés  $A, B$  et  $C$ . Un tel triangle est noté  $\mathcal{T} = ABC$ .

p. 105

Soit  $\mathcal{T} = ABC$  un vrai triangle. On note  $a, b$  et  $c$  les complexes associés respectivement à  $A, B$  et  $C$ .

**Théorème 9.** L'aire de  $ABC$  est

$$\frac{1}{2} \left| \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \right|$$

**Proposition 10.** Les trois médianes de  $\mathcal{T}$  concourent au point dont le complexe associé est

$$\frac{a + b + c}{3}$$

**Définition 11.** Le point précédent est appelé **centre de gravité** de  $\mathcal{T}$ . C'est aussi l'**isobarycentre** des points  $A, B$  et  $C$ .

**Proposition 12.** Les trois hauteurs de  $\mathcal{T}$  concourent au point dont le complexe associé est

$$a_\Omega + b_\Omega + c_\Omega$$

où  $a_\Omega, b_\Omega, c_\Omega$  sont les complexes associés aux points  $A, B$  et  $C$  considérés dans le repère  $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$  avec  $\Omega$  centre du cercle circonscrit au triangle  $\mathcal{T}$ .

**Définition 13.** Le point précédent est appelé **orthocentre** de  $\mathcal{T}$ .

**Proposition 14.** Dans un vrai triangle, orthocentre, centre du cercle circonscrit et centre de gravité sont alignés.

### 3. Droites et cercles dans le plan complexe

**Théorème 15.** Toute équation de la forme

$$\alpha z\bar{z} + \beta\bar{z} + \gamma = 0, \alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C}$$

représente dans  $\mathcal{P}$  :

- (i)  $\mathcal{P}$  tout entier si  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ .
- (ii)  $\emptyset$  si :
  - $\alpha = \beta = 0$  et  $\gamma \neq 0$ ;
  - ou  $\alpha \neq 0$  et  $|\beta|^2 - \alpha\gamma < 0$ .
- (iii) Une droite dirigée par le vecteur  $\vec{v}$  représentant le complexe  $i\beta$  si  $\alpha = 0$  et  $\beta \neq 0$ .
- (iv) Le cercle dont le centre est associé au complexe  $-\frac{\beta}{\alpha}$  et de rayon  $\frac{\sqrt{|\beta|^2 - \alpha\gamma}}{|\alpha|}$  si  $\alpha \neq 0$  et  $|\beta|^2 - \alpha\gamma \geq 0$ .

**Corollaire 16** (Théorème d'Appolonius). Soient  $a$  et  $b$  deux nombres complexes distincts et  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ . L'ensemble

$$E_\lambda = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - b| = \lambda|z - a|\}$$

est identifié dans  $\mathcal{P}$ ;

- À la médiatrice du segment  $[AB]$  pour  $\lambda = 1$ .
- Au cercle de centre le complexe associé à  $\frac{b - \lambda^2 a}{1 - \lambda^2}$  et de rayon  $\frac{\lambda|a - b|}{|1 - \lambda^2|}$  pour  $\lambda \neq 1$ .

**Théorème 17.** Soient  $A, B, C$  et  $D$  des points deux à deux distincts associés respectivement aux complexes  $a, b, c$  et  $d$ . Ces points sont alignés si et seulement si

$$\frac{c - b}{c - a} \frac{d - a}{d - b} \in \mathbb{R}^+$$

**Corollaire 18** (Théorème de Ptolémée). Soient  $A, B, C$  et  $D$  des points deux à deux distincts. Le quadrilatère convexe  $ABCD$  est inscriptible dans un cercle si et seulement si

$$AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$$

## II - Utilisation de la théorie des groupes

### 1. Actions de groupe

#### a. Cadre général

Soit  $X$  un ensemble fini. On considère une action  $\cdot$  de  $G$  sur  $X$ .

[ULM21]  
p. 71

**Proposition 19.** Soit  $x \in X$ . Alors :

- $|G \cdot x| = (G : \text{Stab}_G(x))$ .
- $|G| = |\text{Stab}_G(x)| |G \cdot x|$ .
- $|G \cdot x| = \frac{|G|}{|\text{Stab}_G(x)|}$

**Théorème 20** (Formule des classes). Soit  $\Omega$  un système de représentants d'orbites de l'action de  $G$  sur  $X$ . Alors,

$$|X| = \sum_{\omega \in \Omega} |G \cdot \omega| = \sum_{\omega \in \Omega} (G : \text{Stab}_G(\omega)) = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{|G|}{|\text{Stab}_G(\omega)|}$$

**Définition 21.** On définit :

- $X^G = \{x \in X \mid \forall g \in G, g \cdot x = x\}$  l'ensemble des points de  $X$  laissés fixes par tous les éléments de  $G$ .
- $X^g = \{x \in X \mid g \cdot x = x\}$  l'ensemble des points de  $X$  laissés fixes par  $g \in G$ .

**Théorème 22** (Formule de Burnside). Le nombre  $r$  d'orbites de  $X$  sous l'action de  $G$  est donné par

$$r = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|$$

**Application 23.** Deux colorations des faces d'un cube sont les mêmes si on peut passer de l'une à l'autre par une isométrie du dodécaèdre. Alors, le nombre de colorations distinctes d'un cube avec  $c$  couleurs est

$$\frac{c^2}{24} (c^4 + 3^2 + 12c + 8)$$

[I-P]  
p. 121

## b. Espaces affines

On peut réécrire la définition d'un espace affine en termes d'actions de groupes.

[ROM21]  
p. 73

**Définition 24.** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . Un **espace affine**  $\mathcal{E}$  est un ensemble non vide qui agit (à droite) sur  $E$  de manière simplement transitive. On note  $\cdot$  l'action correspondante. Les éléments de  $\mathcal{E}$  sont appelés **points** et les éléments de  $E$  sont appelés **vecteurs**.

*Remarque 25.* Ainsi, pour tout couple  $(x, y) \in \mathcal{E}$ , il existe un unique  $u \in E$  tel que  $y = x \cdot u$ . On note alors  $u = \overline{xy}$ .

Le reste de la théorie découle de cette remarque.

## 2. Groupe diédral

**Définition 26.** Pour un entier  $n \geq 1$ , le **groupe diédral**  $D_n$  est le sous-groupe, de  $GL_2(\mathbb{R})$  engendré par la symétrie axiale  $s$  et la rotation d'angle  $\theta = \frac{2\pi}{n}$  définies respectivement par les matrices

[ULM21]  
p. 8

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } R = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

**Exemple 27.**  $D_1 = \{\text{id}, s\}$ .

**Proposition 28.** (i)  $D_n$  est un groupe d'ordre  $2n$ .

(ii)  $r^n = s^2 = \text{id}$  et  $sr = r^{-1}s$ .

**Proposition 29.** Un groupe non cyclique d'ordre 4 est isomorphe à  $D_2$ .

p. 28

**Exemple 30.**  $S_2$  est isomorphe à  $D_2$ .

p. 65

**Proposition 31.** Un groupe fini d'ordre  $2p$  avec  $p$  premier est soit cyclique, soit isomorphe à  $D_p$ .

p. 28

**Exemple 32.**  $S_3$  est isomorphe à  $D_3$ .

**Proposition 33.** Les sous-groupes de  $D_n$  sont soit cyclique, soit isomorphes à un  $D_m$  où  $m \mid n$ .

p. 47

[ROM21]  
p. 84

**Théorème 34.** On désigne par  $\Gamma_n$  l'ensemble des sommets d'un polygone à  $n$  côtés et par  $\text{Is}(\Gamma_n)$  l'ensemble des isométries qui conservent  $\Gamma_n$ . Alors,

$$\text{Is}(\Gamma_n) = D_n$$

**Exemple 35.** Les isométries conservant un triangle équilatéral sont les éléments de  $D_3$ .

### III - Utilisation de la théorie des corps

On note  $\mathcal{P}$  un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé direct  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ . On s'autorise à identifier chaque point  $M \in \mathcal{P}$  avec ses coordonnées  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  dans  $\mathcal{R}$ .

[GOZ]

p. 47

**Définition 36.** On dit qu'un point  $M \in \mathcal{P}$  est **constructible** (sous-entendu *à la règle et au compas*) si on peut le construire en utilisant uniquement la règle et le compas, en supposant  $O$  et  $I = (1, 0)$  déjà construits.

**Proposition 37.** Soient  $A, B$  deux points constructibles distincts.

- (i) Si  $A$  est constructible, son symétrique par rapport à  $O$  l'est aussi.
- (ii)  $J = (0, 1)$  est constructible.
- (iii) Si  $C$  est un point constructible, on peut construire à la règle et au compas la perpendiculaire à  $(AB)$  passant par  $C$ .
- (iv) Si  $C$  est un point constructible, on peut construire à la règle et au compas la parallèle à  $(AB)$  passant par  $C$ .

**Proposition 38.** Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$$(x, 0) \text{ est constructible} \iff (0, x) \text{ est constructible}$$

**Définition 39.** Un nombre vérifiant la proposition précédente est dit **nombre constructible**.

**Proposition 40.** (i) Tout élément de  $\mathbb{Q}$  est constructible.

- (ii)  $(x, y)$  est constructible si et seulement si  $x$  et  $y$  le sont.

**Théorème 41.** L'ensemble  $E$  des nombres constructibles est un sous-corps de  $\mathbb{R}$  stable par racine carrée.

**Théorème 42** (Wantzel). Soit  $t \in \mathbb{R}$ .  $t$  est constructible si et seulement s'il existe une suite fini  $(L_0, \dots, L_p)$  de sous-corps de  $\mathbb{R}$  vérifiant :

- (i)  $L_0 = \mathbb{Q}$ .
- (ii)  $\forall i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, L_i$  est une extension quadratique de  $L_{i-1}$ .
- (iii)  $t \in L_p$ .

**Corollaire 43.** (i) Si  $x$  est constructible, le degré de l'extension  $\mathbb{Q}[x]$  sur  $\mathbb{Q}$  est de la forme  $2^s$  pour  $s \in \mathbb{N}$ .

(ii) Tout nombre constructible est algébrique.

**Contre-exemple 44.** —  $\sqrt[3]{2}$  est algébrique, non constructible.

—  $\sqrt{\pi}$  est transcendant et n'est donc pas constructible.

**Application 45** (Quadrature du cercle). Il est impossible de construire, à la règle et au compas, un carré ayant même aire qu'un disque donné.

**Application 46** (Duplication du cube). Il est impossible de construire, à la règle et au compas, l'arête d'un cube ayant un volume double de celui d'un cube donné.

## IV - Utilisation de l'algèbre linéaire

### 1. Déterminant et volume

**Théorème 47.** L'aire  $\mathcal{A}(v, w)$  du parallélogramme engendré par deux vecteurs  $v, w \in \mathbb{R}^n$  est égale à

$$\mathcal{A}(v, w) = |\det(v, w)|$$

**Corollaire 48.** Soient  $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ . On note  $\mathcal{V}(v_1, \dots, v_n)$  le volume du parallélépipède rectangle engendré par  $v_1, \dots, v_n$  (ie. l'ensemble  $\{z \in \mathbb{R}^n \mid z = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, \lambda_i \in [0, 1]\}$ ). On a alors :

$$\mathcal{V}(v_1, \dots, v_n) = |\det(v_1, \dots, v_n)|$$

## 2. Étude d'une suite de polygones

**Proposition 49** (Déterminant circulant). Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ . On pose  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ . Alors

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} P(\omega^j)$$

où  $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ .

[GOU21]  
p. 153

[DEV]

**Application 50** (Suite de polygones). Soit  $P_0$  un polygone dont les sommets sont  $\{z_{0,1}, \dots, z_{0,n}\}$ . On définit la suite de polygones  $(P_k)$  par récurrence en disant que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , les sommets de  $P_{k+1}$  sont les milieux des arêtes de  $P_k$ .

Alors la suite  $(P_k)$  converge vers l'isobarycentre de  $P_0$ .

[I-P]  
p. 389

## 3. Groupe spécial orthogonal en dimension 2 et 3

**Définition 51.** On définit  $\text{SO}(E) = \{u \in \mathcal{O}(E) \mid \det(u) = 1\}$  et  $\text{SO}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$

[GRI]  
p. 241

**Proposition 52.**  $\text{SO}(E)$  est un sous-groupe distingué de  $\mathcal{O}(E)$  d'indice 2 (de même que  $\text{SO}_n(\mathbb{R})$  dans  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ ).

[ROM21]  
p. 724

**Exemple 53.**

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$$

[GRI]  
p. 241

**Théorème 54.** Soit  $A \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ . Alors :

— Si  $A \in \text{SO}_2(\mathbb{R})$  :

$$\exists \theta \in \mathbb{R} \text{ tel que } A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

(rotation d'angle  $\theta$ ).

— Si  $A \notin \text{SO}_2(\mathbb{R})$  :

$$\exists \theta \in \mathbb{R} \text{ tel que } A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$



(symétrie orthogonale par rapport à la droite d'angle polaire  $\frac{\theta}{2}$ ).

**Théorème 55.** Soit  $A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$  et  $u$  l'endomorphisme de  $E$  dont la matrice dans la base canonique est  $A$ . Alors, il existe  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$  telle que la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$  est

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}$$

avec  $\epsilon = \pm 1$ . On note  $E_\epsilon$  le sous-espace vectoriel associé à la valeur propre  $\epsilon$ .

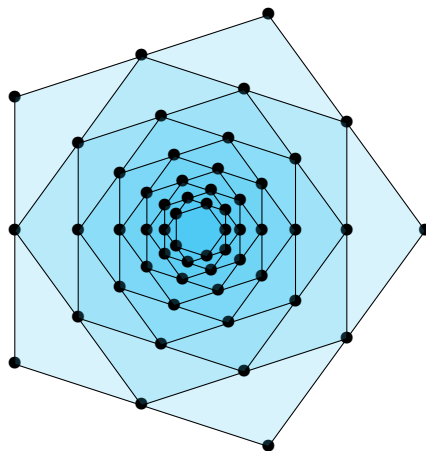
- Si  $\epsilon = 1$  :  $f \in \text{SO}(E)$  est la rotation d'angle  $2\cos(\theta) + 1$  autour de l'axe  $E_1$ .
- Si  $\epsilon = -1$  :  $f \notin \text{SO}(E)$  est la composée de la rotation d'angle  $2\cos(\theta) - 1$  autour de l'axe  $E_{-1}$  avec la symétrie orthogonale par rapport à  $E_{-1}^\perp$ .

**Théorème 56.** Soit  $G$  un sous-groupe fini de  $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ . Alors,  $G$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ,  $D_n$ ,  $A_4$ ,  $S_4$  ou  $A_5$  (où  $n \geq 2$ ).

[ULM21]  
p. 138

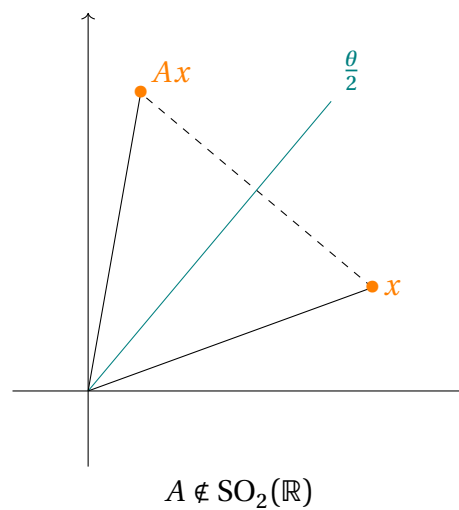
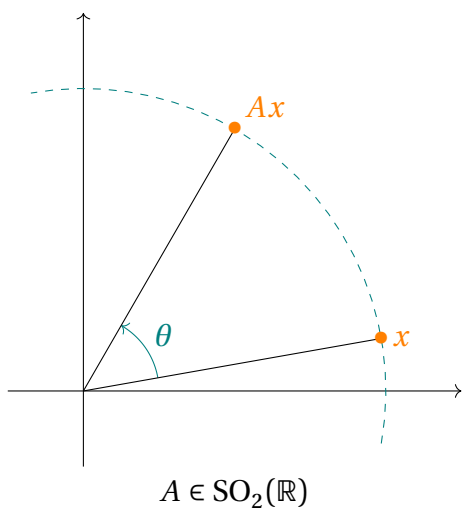
**Application 57 (Solides de Platon).** Il y a cinq polyèdres réguliers : le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre.

# Annexes



[I-P]  
p. 389

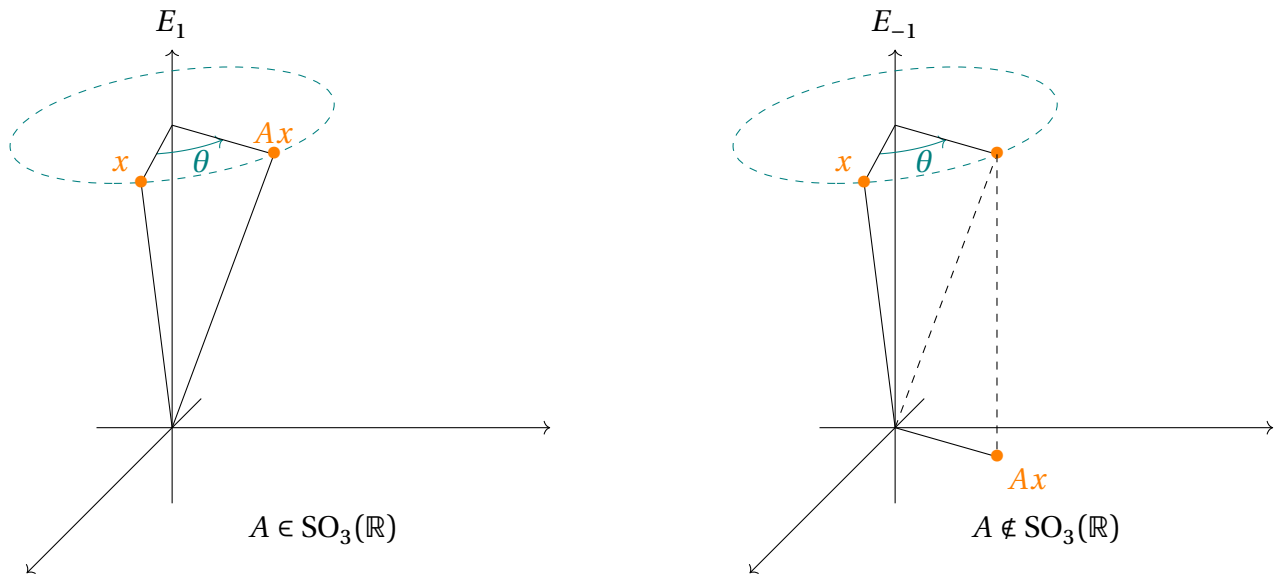
FIGURE 1 – La suite de polygones.



[GRI]  
p. 242

FIGURE 2 – Le groupe  $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$

p. 244

FIGURE 3 – Le groupe  $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$

# Bibliographie

## Les maths en tête

[GOU21]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 13 juill. 2021.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html>.

## Théorie de Galois

[GOZ]

Ivan GOZARD. *Théorie de Galois. Niveau L3-M1*. 2<sup>e</sup> éd. Ellipses, 1<sup>er</sup> avr. 2009.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/4897-15223-theorie-de-galois-niveau-l3-m1-2e-edition-9782729842772.html>.

## Algèbre Linéaire

[GRI]

Joseph GRIFONE. *Algèbre Linéaire*. 6<sup>e</sup> éd. Cépaduès, 9 jan. 2019.

<https://www.cepades.com/livres/algebre-lineaire-edition-9782364936737.html>.

## L'oral à l'agrégation de mathématiques

[I-P]

Lucas ISENMANN et Timothée PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements*. 2<sup>e</sup> éd. Ellipses, 26 mars 2024.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html>.

## Mathématiques pour l'agrégation

[ROM21]

Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie*. 2<sup>e</sup> éd. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332201-mathematiques-pour-l-agregation-algebre-et-geometrie>.

## Théorie des groupes

[ULM21]

Felix ULMER. *Théorie des groupes. Cours et exercices*. 2<sup>e</sup> éd. Ellipses, 3 août 2021.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13760-25304-theorie-des-groupes-2e-edition-9782340057241.html>.