213 Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.

I - Généralités

1. Espaces préhilbertiens

[LI] p. 27

Définition 1. Soit H un espace vectoriel réel (resp. complexe). On appelle **produit scalaire** sur H une forme bilinéaire $\langle .,. \rangle$ telle que :

(i) $\forall y \in H$, $x \mapsto \langle x, y \rangle$ est une forme linéaire.

(ii) $\forall x \in H$, $\langle x, x \rangle \geq 0$ avec égalité si et seulement si $x = 0$.

(iii) $\forall x, y \in H$, $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (resp. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$).

Remarque 2. Dans le cas complexe, on a donc

$$\forall x, y \in H, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$$

Définition 3. En reprenant les notations de la définition, si H est muni d'un produit scalaire, on dit que H est un espace **préhilbertien**.

Exemple 4. — $\mathbb{C}^n$ muni de

$$\langle .,. \rangle : ((x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}, (y_i)_{i \in [\![1,n]\!]}) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

est un espace préhilbertien.

— Plus généralement, on peut définit d'autres produits scalaires sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ en se donnant un poids $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ où $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\omega > 0$. Il suffit de munir l'espace produit du produit scalaire suivant :

$$\langle .,. \rangle_\omega : ((x_i)_{i \in [\![1,n]\!]}, (y_i)_{i \in [\![1,n]\!]}) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i \overline{y_i}$$

Dans toute la suite, on considérera un espace préhilbertien $(H, \langle .,. \rangle)$ sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Notation 5. Puisque $\langle .,. \rangle \geq 0$, on peut poser

$$\|.\| = \sqrt{\langle .,. \rangle}$$

Proposition 6 (Identités de polarisation)**.** Soient $x, y \in H$.

(i) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$ (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

(ii) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle) + \|y\|^2$ (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Théorème 7 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.**

$$\forall x, y \in H, |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Corollaire 8. $\|.\|$ définit une norme sur H, ce qui fait de $(H, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.

Proposition 9 (Identité du parallélogramme)**.** p. 62

$$\forall x, y \in H, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 \|y\|^2)$$

et cette identité caractérise les normes issues d'un produit scalaire.

2. Orthogonalité

Définition 10. On dit que deux vecteurs x et y de H sont orthogonaux si p. 31

$$\langle x, y\rangle = 0$$

et on le note $x \perp y$.

Exemple 11. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire usuel, on a $(-1, 1) \perp (1, 1)$.

Remarque 12 (Théorème de Pythagore). Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, par la Proposition 6,

$$\forall x, y \in H, x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Définition 13. L'orthogonal d'une partie $A \subseteq H$ est l'ensemble

$$A^\perp = \{y \in H \mid \forall x \in A, x \perp y\}$$

Proposition 14. Soit $A \subseteq H$. **[BMP]** p. 99

(i) $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de H.

(ii) $A^\perp = (\mathrm{Vect}(A))^\perp$.

(iii) $A^\perp = (\overline{A})^\perp$.

3. Espaces de Hilbert

Définition 15. Si $(H, \|.\|)$ est complet, on dit que H est un **espace de Hilbert**. p. 91

On suppose dans la suite que $(H, \|.\|)$ est un espace de Hilbert.

Exemple 16.
— Tout espace euclidien ou hermitien est un espace de Hilbert.
— L'ensemble des suites de nombres complexes de carré sommables

$$\ell_2(\mathbb{N}) = \{(x_n) \in \mathbb{C}^2 \mid \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty\}$$

muni du produit scalaire hermitien

$$\langle .,. \rangle : ((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \overline{y_n}$$

est un espace de Hilbert.

II - Le théorème de projection sur un convexe fermé et ses conséquences

1. Théorème de projection

[DEV]

Théorème 17 (Projection sur un convexe fermé)**.** Soit $C \subseteq H$ un convexe fermé non-vide. Alors : [LI] p. 32

$$\forall x \in H, \exists ! y \in C \text{ tel que } d(x, C) = \inf_{z\in C} \|x - z\| = d(x, y)$$

On peut donc noter $y = P_C(x)$, le **projeté orthogonal de** x **sur** C. Il s'agit de l'unique point de C vérifiant

$$\forall z \in C, \langle x - P_C(x), z - P_C(x) \rangle \leq 0 \qquad (*)$$

Remarque 18. En dimension finie, dans un espace euclidien ou hermitien, on peut projeter sur tous les fermés. On perd cependant l'unicité et la caractérisation angulaire. [BMP] p. 96

Proposition 19. Soit $C \subseteq H$ un convexe fermé non-vide. L'application P_C est lipschitzienne de rapport 1 et est, en particulier, continue.

2. Décomposition en somme directe orthogonale

Théorème 20 (Projection sur un sous-espace fermé)**.** Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H.

(i) Si $x \in H$, le projeté $P_F(x)$ de x sur F est l'unique élément $p \in H$ qui vérifie

$$p \in F \text{ et } x - p \in F^\perp$$

(ii) $P_F : H \to F$ est linéaire, continue, surjective.

(iii) $H = F \oplus F^\perp$ et P_F est le projecteur sur F associé à cette décomposition.

(iv) Soient $x, x_1, x_2 \in H$. On a :

$$x = x_1 + x_2 \text{ avec } x_1 \in F, x_2 \in F^\perp \iff x_1 = P_F(x) \text{ et } x_2 = P_{F^\perp}(x)$$

Contre-exemple 21. On considère le sous-espace vectoriel de $\ell_2(\mathbb{N})$ constitué des suites nulles à partir d'un certain rang. Alors $F^\perp = \{0\}$, et ainsi $H \neq F \oplus F^\perp$.

Corollaire 22. Soit F un sous-espace vectoriel de H. Alors,

$$F^{\perp\perp} = \overline{F}$$

Corollaire 23. Soit F un sous-espace vectoriel de H. Alors,

$$\overline{F} = H \iff F^\perp = 0$$

3. Dualité dans un espace de Hilbert

Théorème 24 (Représentation de Riesz)**.** L'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} H & \to & H' \\ y & \mapsto & (x \mapsto \langle x, y \rangle) \end{array}$$

est une isométrie linéaire bijective de H sur son dual topologique H'.

Remarque 25. Cela signifie que :

$$\forall \varphi \in H', \exists! y \in H, \text{ tel que } \forall x \in H, \varphi(x) = \langle x, y \rangle$$

et de plus, $|||\varphi||| = \|y\|$.

Application 26 (Existence de l'adjoint)**.** Soit $u \in \mathcal{L}(H)$. Il existe un unique $v \in \mathcal{L}(H)$ tel que :

$$\forall x, y \in H, \langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$$

On dit que v est **l'adjoint** de u et on note généralement $v = u^*$.

[DEV]

Application 27 (Dual de L_p)**.** Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré de mesure finie. On note $\forall p \in [1,2]$, $L_p = L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$. L'application [Z-Q] p. 222

$$\varphi : \begin{array}{ll} L_q & \to (L_p)' \\ g & \mapsto \left(\varphi_g : f \mapsto \int_X f g \, \mathrm{d}\mu\right) \end{array} \qquad \text{où } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

est une isométrie linéaire surjective. C'est donc un isomorphisme isométrique.

III - Bases hilbertiennes

Définition 28. On dit qu'une famille $(e_i)_{i \in I}$ d'éléments de H est **orthonormée** de H si : [LI] p. 41

$$\forall i, j \in I, \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$$

Exemple 29. Dans $\ell_2(\mathbb{N})$, la famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{n\text{-ième position}}, 0 \dots)$$

est orthonormée.

Proposition 30. Toute famille orthonormée est libre.

Proposition 31 (Inégalité de Bessel)**.** Soient $x \in H$ et $(e_i)_{i \in I}$ une famille orthonormée de H. Alors,

$$\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle| \leq \|x\|$$

Définition 32. On dit qu'une famille $(e_i)_{i \in I}$ d'éléments de H est **orthonormée** de H si elle est orthonormée et totale (ie. $\mathrm{Vect}(e_i)_{i \in I}$ est dense dans H).

Théorème 33. [BMP] p. 108

(i) Tout espace de Hilbert admet une base hilbertienne.

(ii) Tout espace de Hilbert séparable (ie. admettant une partie dénombrable dense) admet une base hilbertienne dénombrable.

Exemple 34. $\mathbb{K}^n$ est séparable pour tout entier n et L_p aussi pour tout $p \in [1, +\infty[$. On a donc existence d'une base hilbertienne dénombrable pour ces espaces.

Théorème 35. Soit H un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\in I}$ une famille orthonormée dénombrable de H. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) La famille orthonormée $(e_n)_{n\in I}$ est une base hilbertienne de H.

(ii) $\forall x \in H$, $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$.

(iii) $\forall x \in H$, $\|x\|_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$.

(iv) L'application

$$\Delta : \begin{array}{rcl} H & \rightarrow & \ell_2(\mathbb{N}) \\ x & \mapsto & (\langle x, e_n \rangle)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

est une isométrie linéaire bijective.

Remarque 36. L'égalité du Théorème 35 Point (iii) est appelée **égalité de Parseval**.

[LI] p. 45

Corollaire 37. Tous les espaces de Hilbert séparables sont isométriquement isomorphes à $\ell_2(\mathbb{N})$.

IV - L'espace L_2

1. Aspect hilbertien

Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré.

[BMP] p. 92

Notation 38. On note $L_p = L_p(X, \mathscr{A}, \mu)$ pour tout $p \in [1, +\infty]$.

Définition 39. On considère la forme bilinéaire suivante sur L_2 :

$$\langle .,. \rangle : (f, g) \mapsto \int_X f\overline{g} \, \mathrm{d}\mu$$

C'est un produit scalaire hermitien, ce qui confère à $(L_2, \langle .,. \rangle)$ une structure d'espace préhilbertien.

Remarque 40. La norme associée au produit scalaire précédent est la norme $\|.\|_2$ de L_2.

[LI] p. 10

Théorème 41 (Riesz-Fischer)**.** Pour tout $p \in [1, +\infty]$, L_p est complet pour la norme $\|.\|_p$.

p. 31

Corollaire 42. L_2 est un espace de Hilbert.

2. Polynômes orthogonaux

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_n : x \mapsto x^n$. **[BMP]** p. 110

Définition 43. On appelle **fonction poids** une fonction $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable, positive et telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \rho g_n \in L_1(I)$.

Soit $\rho : I \to \mathbb{R}$ une fonction poids.

Notation 44. On note $L_2(I, \rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Proposition 45. Muni de

$$\langle .,. \rangle : (f,g) \mapsto \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

$L_2(I,\rho)$ est un espace de Hilbert.

Théorème 46. Il existe une unique famille (P_n) de polynômes unitaires orthogonaux deux-à-deux telle que $\deg(P_n) = n$ pour tout entier n. C'est la famille de **polynômes orthogonaux** associée à ρ sur I.

Exemple 47 (Polynômes de Hermite)**.** Si $\forall x \in I$, $\rho(x) = e^{-x^2}$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{\partial}{\partial x^n}\left(e^{-x^2}\right)$$

Lemme 48. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_n \in L_1(I,\rho)$ et on considère (P_n) la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ sur I. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_n \in L_2(I,\rho)$. En particulier, l'algorithme de Gram-Schmidt a bien du sens et (P_n) est bien définie. p. 140

Application 49. On considère (P_n) la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ sur I et on suppose qu'il existe $a > 0$ tel que

$$\int_I e^{a|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$$

alors (P_n) est une base hilbertienne de $L_2(I,\rho)$ pour la norme $\|.\|_2$.

Contre-exemple 50. On considère, sur $I = \mathbb{R}_*^+$, la fonction poids $\rho : x \mapsto x^{-\ln(x)}$. Alors, la famille des g_n n'est pas totale. La famille des polynômes orthogonaux associée à ce poids particulier n'est donc pas totale non plus : ce n'est pas une base hilbertienne.

3. Séries de Fourier

Notation 51. [Z-Q] p. 73
- Pour tout $p \in [1, +\infty]$, on note $L_p^{2\pi}$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodiques et mesurables, telles que $\|f\|_p < +\infty$.
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note e_n la fonction 2π-périodique définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $e_n(t) = e^{int}$.

Proposition 52. $L_2^{2\pi}$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle ., . \rangle : (f, g) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$$

Théorème 53. La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L_2^{2\pi}$. [BMP] p. 123

Corollaire 54.

$$\forall f \in L_2^{2\pi}, f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, e_n \rangle e_n$$

Exemple 55. On considère $f : x \mapsto 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi, \pi]$. Alors, [GOU20] p. 272

$$\frac{\pi^4}{90} = \|f\|_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

Remarque 56. L'égalité du Corollaire 54 est valable dans $L_2^{2\pi}$, elle signifie donc que [BMP] p. 124

$$\left\| \sum_{n=-N}^{N} \langle f, e_n \rangle e_n - f \right\|_2 \longrightarrow_{N\to+\infty} 0$$

Annexes

[LI]
p. 32

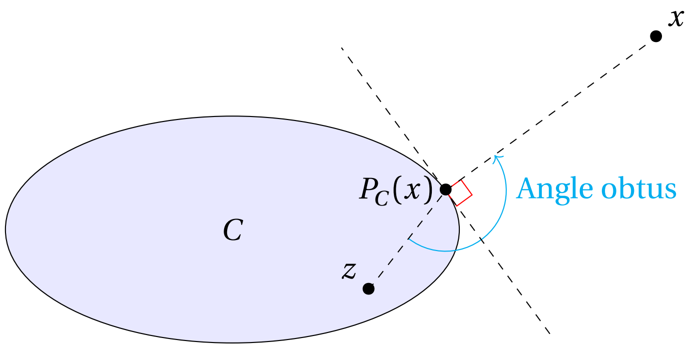

FIGURE 1 – Illustration du théorème de projection sur un convexe fermé

Bibliographie

Objectif agrégation **[BMP]**

Vincent BECK, Jérome MALICK et Gabriel PEYRÉ. *Objectif agrégation.* 2e éd. H&K, 22 août 2005.
https://objectifagregation.github.io.

Les maths en tête **[GOU20]**

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse.* 3e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html.

Cours d'analyse fonctionnelle **[LI]**

Daniel LI. *Cours d'analyse fonctionnelle. avec 200 exercices corrigés.* Ellipses, 3 déc. 2013.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/6558-cours-danalyse-fonctionnelle-avec-200-exercices-corriges-9782729883058.html.

Analyse pour l'agrégation **[Z-Q]**

Claude ZUILY et Hervé QUEFFÉLEC. *Analyse pour l'agrégation. Agrégation/Master Mathématiques.* 5e éd. Dunod, 26 août 2020.
https://www.dunod.com/prepas-concours/analyse-pour-agregation-agregationmaster-mathematiques.