215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

Sauf mention contraire, nous travaillerons sur l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}^n$ pour $n \geq 1$. Soient F un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ et $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert.

I - Généralisation de la notion de dérivée

1. Différentielle

[GOU20] p. 323

Définition 1. Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. Soient $U \subseteq E$ ouvert et $f : U \to F$ une application de U dans F. f est dite **différentiable** en un point a de U s'il existe $\ell_a \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que

$$f(a+h) = f(a) + \ell_a(h) + o(\|h\|) \text{ quand } h \longrightarrow 0$$

Si ℓ_a existe, alors elle est unique et on la note $\mathrm{d}f_a$: c'est la **différentielle** de f en a.

Remarque 2.
— En dimension quelconque $\mathrm{d}f_a$ dépend a priori des normes choisies sur E et F. Cependant, en dimension finie, l'équivalence des normes implique que l'existence et la valeur de $\mathrm{d}f_a$ ne dépend pas des normes choisies.
— La définition demande à ℓ_a d'être continue. En dimension finie, le problème ne se pose donc pas.
— Une fonction réelle est différentiable en a si et seulement si elle est dérivable en a. Dans ce cas, on a $\mathrm{d}f_a : h \mapsto f'(a)h$.

Exemple 3. Si f est linéaire et continue, alors $\mathrm{d}f_a = f$ pour tout $a \in E$.

Proposition 4. Une fonction différentiable en un point et continue en ce point.

Proposition 5. Soit $V \subseteq F$ un ouvert. Soit $f : U \to F$ différentiable en un point a de U.

(i) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, λf est différentiable en a, et $\mathrm{d}(\lambda f)_a = \lambda \mathrm{d}f_a$.

(ii) Si $g : U \to F$ est différentiable en a, alors $f + g$ l'est aussi, et $\mathrm{d}(f+g)_a = \mathrm{d}f_a + \mathrm{d}g_a$.

(iii) Soit $g : V \to G$. On suppose $f(U) \subseteq V$ et g différentiable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est différentiable en a et, $\mathrm{d}(f \circ g)_a = \mathrm{d}g_{f(a)} \circ \mathrm{d}f_a$.

2. Dérivée selon un vecteur

Définition 6. Soit $a \in U$. p. 324

- Soit $v \in \mathbb{R}^n$. Si la fonction de la variable réelle $\varphi : t \mapsto f(a+tv)$ est dérivable en 0, on dit que f est **dérivable en a selon le vecteur v**. On note alors

$$f'_v(a) = \varphi'(0)$$

- Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et soit $i \in [\![1,n]\!]$. On dit que f admet une **i-ième dérivée partielle en a** si f est dérivable en a selon le vecteur e_i. On note alors

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f'_{e_i}(a)$$

Remarque 7. Soient $i \in [\![1,n]\!]$ et $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ est aussi la dérivée de l'application partielle $t \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_n)$ en $t = 0$.

Proposition 8. Une fonction différentiable en un point est dérivable selon tout vecteur en ce point.

Contre-exemple 9. La fonction p. 329

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

est dérivable selon tout vecteur au point $(0,0)$ mais n'est pas continue en $(0,0)$.

Théorème 10. Si toutes les dérivées partielles de f existent et si elles sont continues en un point a de U, alors f est différentiable en a et on a p. 325

$$\mathrm{d}f_a = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i^*$$

où $(e_i^*)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est la base duale de la base canonique $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ de $\mathbb{R}^n$.

Contre-exemple 11. La fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

est différentiable en 0, mais f' n'est pas continue en 0.

Corollaire 12. Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ différentiable en un point $a \in \mathbb{R}^n$. On note par f_i la i-ième coordonnée de f $\forall i \in [\![1,m]\!]$. Alors la matrice de l'application linéaire $\mathrm{d}f_a$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ est p. 327

$$\mathrm{Jac}(f)_a = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i\in[\![1,m]\!] \\ j\in[\![1,n]\!]}}$$

Définition 13. Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ différentiable en un point $a \in \mathbb{R}^n$. La matrice $\mathrm{Jac}(f)_a$ est la **jacobienne** de f en a. Son déterminant est le **jacobien** de f en a.

Exemple 14. Soit $f : (r,\theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, alors $\det(\mathrm{Jac}(f)_{(r,\theta)}) = r$. p. 354

Théorème 15 (Inégalité des accroissements finis)**.** Soit $f : U \to F$ continue sur un segment $[a,b] \subseteq U$ et différentiable sur $]a,b[$. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $|||\mathrm{f}f_c||| \leq M$ pour tout $c \in]a,b[$. Alors, p. 327

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M\|b-a\| \qquad (*)$$

Corollaire 16. En reprenant les notations du théorème précédent :

(i) Si U est convexe, si f est différentiable sur U et si $|||\mathrm{f}f_c||| \leq M$ pour tout $c \in U$, alors l'inégalité $(*)$ précédente est vraie pour tout $a, b \in U$.

(ii) Si U est un ouvert connexe et $\mathrm{f}f_c = 0$ pour tout $c \in U$, alors f est constante.

3. Différentielle itérée

Définition 17. Soit $f : U \to F$. Sous réserve d'existence, on peut définir par récurrence sur p une dérivée partielle d'ordre p par la relation

$$\frac{\partial^p}{\partial x_{i_p} \dots \partial x_{i_1}} f = \frac{\partial}{\partial x_{i_p}} \left(\frac{\partial^{p-1}}{\partial x_{i_{p-1}} \dots \partial x_{i_1}} f \right)$$

f est alors dite de classe $\mathscr{C}^p$ si toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre p existent et sont continues sur U.

Exemple 18. La fonction p. 79

$$x \longmapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

est $\mathscr{C}^\infty$.

Théorème 19 (Schwarz)**.** On se place dans la cas $n = 2$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ qui admet des dérivées partielles sur U, continues en $a \in U$. Alors : p. 326

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$$

Corollaire 20. Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathscr{C}^p$. Alors les dérivées partielles jusqu'à l'ordre p ne dépendant pas de l'ordre de dérivation.

Notation 21. Soient $f : U \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathscr{C}^k$ sur U et $n \in [\![1, k]\!]$. Par analogie avec

$$\forall (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m, (a_1 + \dots + a_m)^n = \sum_{i_1 + \dots + i_m = n} \frac{n!}{i_1! \dots i_m!} a_1^{i_1} \dots a_m^{i_m}$$

on note

$$\left(\sum_{i=1}^m h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right)^{(n)} = \sum_{i_1 + \dots + i_m = n} \frac{n!}{i_1! \dots i_m!} h_1^{i_1} \dots h_m^{i_m} \frac{\partial^n}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_m^{i_m}} f(a)$$

Théorème 22 (Formule de Taylor-Lagrange)**.** Soient $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^p$ sur U, $x \in \mathbb{R}^n$, $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $[x, x+h] \subseteq U$. Alors, $\exists \theta \in]0,1[$ tel que

$$f(x+h) = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{i!} \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right)^{(j)} + \frac{1}{p!} \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \theta h) \right)^{(p)}$$

Exemple 23. Pour $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, pour $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$\begin{aligned} f(h,k) = f(0,0) &+ h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \\ &+ \frac{1}{2}\left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} f(\theta h, \theta k) + hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} f(\theta h, \theta k) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} f(\theta h, \theta k) \right) \\ &+ o(\|(h,k)\|^2) \end{aligned}$$

Théorème 24 (Formule de Taylor avec reste intégral)**.** Soient $f : U \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathscr{C}^k$ sur U, $x \in \mathbb{R}^n$, $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $[x, x+h] \subseteq U$. Alors,

$$f(x+h) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{i!} \left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right)^{(j)} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} \left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+th) \right)^{(k)} \mathrm{d}t$$

Théorème 25 (Formule de Taylor-Young)**.** Soient $f : U \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathscr{C}^k$ sur U, $x \in \mathbb{R}^n$, $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $[x, x+h] \subseteq U$. Alors,

$$f(x+h) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{i!} \left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right)^{(j)} + o(\|h\|^k)$$

Application 26 (Lemme d'Hadamard)**.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$. On suppose f différentiable en 0 avec $\mathrm{d}f_0 = 0$ et $f(0) = 0$. Alors,

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j h_{i,j}(x_1, \dots, x_n)$$

où $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $h_{i,j} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est $\mathscr{C}^\infty$.

II - Théorèmes fondamentaux

1. Inversion locale

Définition 27. Soit $f : U \to F$. On dit que f est un **difféomorphisme** de classe $\mathscr{C}^k$ de U sur $V = f(U)$ si f et f^{-1} sont bijectives et de classe $\mathscr{C}^k$ respectivement sur U et V. **[ROU]** p. 54

Exemple 28. $x \mapsto x^3$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$, mais n'est pas un difféomorphisme.

Théorème 29 (Inversion locale)**.** Soit $f : U \to F$ de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose qu'il existe $a \in U$ tel que $\mathrm{d}f_a$ est inversible. **[GOU20]** p. 341

Alors, il existe V voisinage de a et W voisinage de $f(a)$ tels que $f_{|V}$ soit un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$ de V sur W.

Remarque 30. Si $F = \mathbb{R}^n$, $\mathrm{d}f_a$ est inversible si et seulement si le jacobien de f en a, $\det \mathrm{Jac}(f)_a$, est non nul.

Corollaire 31. Soit $f : U \to \mathbb{R}^q$ de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que pour tout $a \in U$, $\mathrm{d}f_a$ est inversible. Alors f est une application ouverte.

Exemple 32. L'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $(x,y) \mapsto (x^2 - y^2, xy)$ est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^\infty$ en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$. p. 347

[BMP] p. 9

Application 33. Soit $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$. Alors, $V = \varphi(U)$ est mesurable et tout fonction f appartient à L_1 si et seulement si $|\det \mathrm{Jac}(\varphi)_a| f \circ \varphi$ appartient à L_1. Dans ce cas,

$$\int_V f(x)\,\mathrm{d}x = \int_U |\det \mathrm{Jac}(\varphi)_a| f(\varphi(y))\,\mathrm{d}y$$

[GOU20] p. 355

Exemple 34. En passant en coordonnées polaires,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

[BMP] p. 9

Application 35. Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et k un entier. Alors, si A est suffisamment proche de l'identité I_n, A est une racine k-ième (ie. $\exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^k = A$).

[I-P] p. 396

Lemme 36.
(i) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Alors $\exp(A) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
(ii) $\exp$ est différentiable en 0 et $\mathrm{d}\exp_0 = \mathrm{id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$.
(iii) Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Alors $M^{-1} \in \mathbb{C}[M]$.

[DEV] **Théorème 37.** $\exp : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Application 38. $\exp(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^2$, où $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^2$ désigne les carrés de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

2. Fonctions implicites

[GOU20] p. 344

Définition 39. Soient $E_1, \dots, E_n, F$ des espaces de Banach, $\Omega \subseteq E$ un ouvert où $E = E_1 \times \dots \times E_n$ et $a = (a_1, \dots, a_n) \in E$. Soit $f : \Omega \to F$. Alors, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $f_i : x \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$ est définie sur un voisinage de a_i dans E_i. Si elle est différentiable en a_i, on dit que f admet une **différentielle partielle** d'indice i en a, et on note celle-ci $\partial_i f_a$.

Remarque 40. En reprenant les notations précédentes :

— Si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $E_i = \mathbb{R}$ et $F = E = \mathbb{R}^n$, alors $\partial_i f_a = h \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

— Si f est différentiable en a, alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\partial_i f_a$ existe et

$$\forall h = (h_1, \dots, h_n) \in E, \, \mathrm{d}f_a(h) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f_a(h_i)$$

Théorème 41 (des fonctions implicites)**.** Soient $U \times V \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ où U et V sont des ouvertes. Soit $f : U \times V \to F$ de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose qu'il existe $(a, b) \in U \times V$ tel que $\partial_2 f_{(a,b)} : \mathbb{R}^m \to F$ est un isomorphisme. Alors, il existe :

— Un voisinage ouvert U_0 de a dans U.

— Un voisinage ouvert W de $f(a, b)$.

— Un voisinage ouvert Ω de (a, b) dans $U \times V$.

— Une fonction $\varphi : U_0 \times W \to V$ de classe $\mathscr{C}^1$.

Vérifiant :

$$\forall x \in U_0, \, \forall z \in W, \, \exists! y \in V \text{ tel que } f(x, y) = z \text{ avec } (x, y) \in \Omega \text{ et } y = \varphi(x, z)$$

En particulier,

$$\forall (x, z) \in U_0 \times W, \, f(x, \varphi(x, z)) = z$$

Remarque 42. Avec les notations précédentes, si $E = F = \mathbb{R}$, on peut choisir n'importe quelle variable pour obtenir [BMP] p. 11

$$y = \varphi(x) \text{ si } \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0 \text{ ou } x = \varphi(y) \text{ si } \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$$

Remarque 43. La signification de ce théorème est que la surface définie implicitement par l'équation $f(x, y) = 0$ peut, au moins localement, être vue comme le graphe d'une fonction φ. [ROU] p. 193

Proposition 44. Avec les notations précédentes, la différentielle de la fonction implicite φ est donnée par :

$$\mathrm{d}\varphi_x = -(\partial_2 f_{(x,\varphi(x))})^{-1} \circ (\partial_1 f_{(x,\varphi(x))})$$

Exemple 45. Pour l'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$, on a $\partial_2 f_{(x,y)} = 2y$. On exclut les points où $y = 0$. En prenant $(0, 1)$ et $(0, -1)$ pour points de départ, on a deux fonctions implicites qui correspondent aux demi-cercles supérieur et inférieur :

— $y = \varphi_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

— $y = \varphi_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$.

De plus, en dérivant par rapport à x : $2x + 2yy' = 0$ et, $y' = \varphi_1'(x) = \frac{-x}{y}$.

III - Application aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$

1. Gradient, hessienne

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application différentiable en un point a de U. **[GOU20]** p. 324

Définition 46. $\mathrm{d}f_a$ est une forme linéaire, et le théorème de représentation de Riesz donne l'existence d'un unique vecteur v de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall h \in \mathbb{R}^n,\ \mathrm{d}f_a(h) = \langle v, h\rangle$$

Le vecteur v s'appelle **gradient** de f, et est noté ∇f_a.

Proposition 47. $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et,

$$\nabla f_a = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i$$

où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On suppose pour la suite f de classe $\mathscr{C}^2$. p. 336

Définition 48. La matrice **hessienne** de f en a, notée $\mathrm{Hess}(f)_a$, est définie par

$$\mathrm{Hess}(f)_a = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j\in[\![1,n]\!]}$$

Remarque 49. Pour f de classe $\mathscr{C}^2$, $\mathrm{Hess}(f)_a$ est symétrique.

Théorème 50. On suppose $\mathrm{d}f_a = 0$ (a est un **point critique** de f). Alors :

(i) Si f admet un minimum (resp. maximum) relatif en a, $\mathrm{Hess}(f)_a$ est positive (resp. négative).

(ii) Si $\mathrm{Hess}(f)_a$ définit une forme quadratique définie positive (resp. définie négative), f admet un minimum (resp. maximum) relatif en a.

Exemple 51. On suppose $\mathrm{d}f_a = 0$. On pose $(r,s,t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f\right)_{i+j=2}$. Alors :

(i) Si $rt - s^2 > 0$ (resp. < 0), f admet une minimum (resp. maximum) relatif en a.

(ii) Si $rt - s^2 < 0$ (resp. < 0), f n'a pas d'extremum en a.

(iii) Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut rien conclure.

Exemple 52. La fonction $(x,y) \mapsto x^4 + y^2 - 2(x-y)^2$ a trois points critiques qui sont des minimum locaux : $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Contre-exemple 53. $x \mapsto x^3$ a sa hessienne positive en 0, mais n'a pas d'extremum en 0.

2. Homéomorphismes

Lemme 54. Soit $A_0 \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ inversible. Alors il existe un voisinage V de A_0 dans $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et une application $\psi : V \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que **[ROU]** p. 209

$$\forall A \in V, A = {}^t\psi(A) A_0 \psi(A)$$

[DEV] **Lemme 55** (Morse)**.** Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^3$ (où U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine). On suppose : p. 354

— $\mathrm{d}f_0 = 0$.

— La matrice symétrique $\mathrm{H}(f)_0$ est inversible.

— La signature de $\mathrm{H}(f)_0$ est $(p, n-p)$.

Alors il existe un difféomorphisme $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ de classe $\mathscr{C}^1$ entre deux voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$ $V \subseteq U$ et W tel que $\varphi(0) = 0$ et

$$\forall x \in U, f(x) - f(0) = \sum_{k=1}^{p} \phi_k^2(x) - \sum_{k=p+1}^{n} \phi_k^2(x)$$

Exemple 56. On considère $f : (x,y) \mapsto x^2 - y^2 + \frac{y^4}{4}$. La courbe d'équation p. 334

$$f(x,y) = 0$$

est (au changement près du nom des coordonnées) une projection de l'intersection d'un cylindre et d'une sphère tangents. On a

$$f = u^2 - v^2$$

avec $u : (x, y) \mapsto x$ et $v : (x, y) \mapsto y\sqrt{1 - \frac{y^2}{4}}$.

3. Optimisation

Théorème 57 (Extrema liés)**.** Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soient $f, g_1, \dots, g_r : U \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. On note $\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$. Si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$ et si les formes linéaires $\mathrm{d}(g_1)_a, \dots, \mathrm{d}(g_r)_a$ sont linéairement indépendantes, alors il existe des uniques $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ tels que

$$\mathrm{d}f_a = \lambda_1 \mathrm{d}(g_1)_a + \dots + \lambda_r \mathrm{d}(g_r)_a$$

Définition 58. Les $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ du théorème précédent sont appelés appelés **multiplicateurs de Lagrange**.

Remarque 59. La relation finale du Théorème 57 équivaut à [BMP] p. 21

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(\mathrm{d}(g_i)_a) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathrm{d}f_a)$$

et elle exprime que $\mathrm{d}f_a$ est nulle sur l'espace tangent à Γ en a (ie. ∇f_a est orthogonal à l'espace tangent à Γ en a).

Contre-exemple 60. On pose $g : (x, y) \mapsto x^3 - y^2$ et on considère $f : (x, y) \mapsto x + y^2$. On cherche à minimiser f sous la contrainte $g(x, y) = 0$.

Alors, le minimum (global) de f sous cette contrainte est atteint en $(0, 0)$, la différentielle de g en $(0, 0)$ est nulle et la relation finale du Théorème 57 n'est pas vraie.

Application 61 (Théorème spectral)**.** Tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien se diagonalise dans une base orthonormée.

Application 62. p. 35

$$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \left\{ M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid \|M\|^2 = \inf_{P \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})} \|P\|^2 \right\}$$

où $\|.\| : M \mapsto \sqrt{\mathrm{trace}({}^t MM)}$ (ie. $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ qui minimisent la norme euclidienne canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$).

[GOU20] p. 339

Application 63 (Inégalité arithmético-géométrique)**.**

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n, \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

[ROU]
p. 409

Application 64 (Inégalité d'Hadamard)**.**

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \det(x_1, \dots, x_n) \leq \|x_1\| \dots \|x_n\|$$

avec égalité si et seulement si $(x_1, \dots, x_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

Annexes

[BMP] p. 10

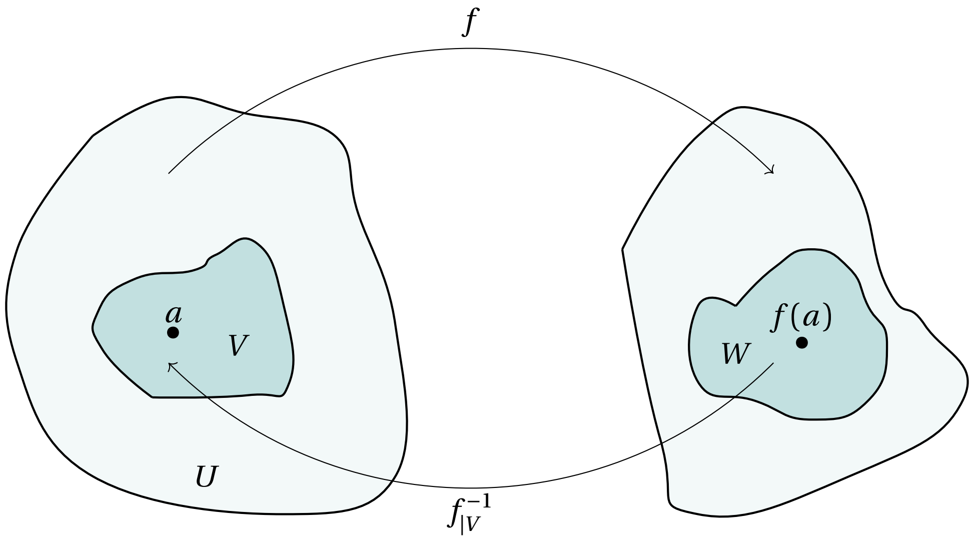

FIGURE 1 – Inversion locale

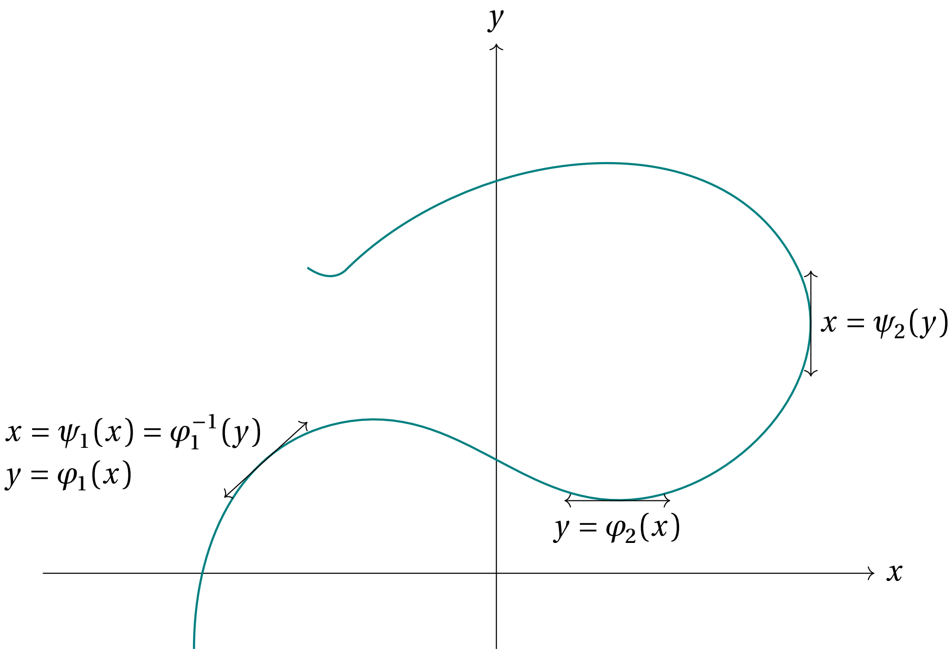

FIGURE 2 – Fonctions implicites

Bibliographie

Objectif agrégation **[BMP]**

Vincent Beck, Jérome Malick et Gabriel Peyré. *Objectif agrégation.* 2e éd. H&K, 22 août 2005. https://objectifagregation.github.io.

Les maths en tête **[GOU20]**

Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Analyse.* 3e éd. Ellipses, 21 avr. 2020. https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html.

L'oral à l'agrégation de mathématiques **[I-P]**

Lucas Isenmann et Timothée Pecatte. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements.* 2e éd. Ellipses, 26 mars 2024. https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html.

Petit guide de calcul différentiel **[ROU]**

François Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel. à l'usage de la licence et de l'agrégation.* 4e éd. Cassini, 27 fév. 2015. https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/94-petit-guide-de-calcul-differentiel-4e-ed.html.