218 Formules de Taylor. Exemples et applications.

I - Énoncés des formules de Taylor

1. En dimension 1

Dans cette partie, I désigne un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et E un espace de Banach sur $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to E$ une application. **[GOU20]** p. 73
Dans un premier temps, supposons $E = \mathbb{R}$.

Théorème 1 (Rolle)**.** On suppose f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors,
$$\exists c \in]a, b[\text{ tel que } f'(c) = 0$$

Théorème 2 (Formule de Taylor-Lagrange)**.** On suppose f de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[a, b]$ telle que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a, b[$. Alors,
$$\exists c \in]a, b[\text{ tel que } f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

Application 3.
- $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

On ne suppose plus $E = \mathbb{R}$. Le Théorème 1 n'est plus forcément vrai, mais on a tout de même le résultat suivant.

Théorème 4 (Inégalité des accroissements finis)**.** Soit $g : I \to \mathbb{R}$. On suppose f et g continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Si pour tout $t \in]a, b[$ on a $\|f'(t)\| \leq g'(t)$. Alors,
$$\|f(b) - f(a)\| \leq (g(b) - g(a))$$

Corollaire 5 (Inégalité de Taylor-Lagrange)**.** On suppose f de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[a, b]$ telle que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a, b[$. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall t \in]a, b[$, $\|f^{(n+1)}(t)\| \leq M$. Alors,
$$\left\| f(b) - f(a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right\| \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Théorème 6 (Formule de Taylor-Young)**.** On suppose f de classe $\mathscr{C}^n$ sur I telle que $f^{(n+1)}(x)$

existe pour $x \in I$. Alors, quand $h \longrightarrow 0$, on a

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + o(h^{n+1})$$

p. 80

Application 7 (Théorème de Darboux)**.** On suppose f dérivable sur I. Alors $f'(I)$ est un intervalle.

p. 77

Théorème 8 (Formule de Taylor avec reste intégral)**.** On suppose f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I. Alors,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

2. En dimension supérieure

Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert.

p. 328

Notation 9. Soient $f : U \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathscr{C}^k$ sur U et $n \in [\![1,k]\!]$. Par analogie avec

$$\forall (a_1,\dots,a_m) \in \mathbb{R}^m, (a_1+\cdots+a_m)^n = \sum_{i_1+\cdots+i_m=n} \frac{n!}{i_1!\dots i_m!} a_1^{i_1} \dots a_m^{i_m}$$

on note

$$\left(\sum_{i=1}^{m} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)^{(n)} = \sum_{i_1+\cdots+i_m=n} \frac{n!}{i_1!\dots i_m!} h_1^{i_1} \dots h_m^{i_m} \frac{\partial^n}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_m^{i_m}} f(a)$$

Théorème 10 (Formule de Taylor-Lagrange)**.** Soient $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^p$ sur U, $x \in \mathbb{R}^n$, $h = (h_1,\dots,h_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $[x, x+h] \subseteq U$. Alors, $\exists \theta \in]0,1[$ tel que

$$f(x+h) = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{i!} \left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)^{(j)} + \frac{1}{p!} \left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\theta h)\right)^{(p)}$$

Exemple 11. Pour $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, pour $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$\begin{aligned} f(h,k) = f(0,0) &+ h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \\ &+ \frac{1}{2}\left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} f(\theta h, \theta k) + hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} f(\theta h, \theta k) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} f(\theta h, \theta k)\right) \\ &+ o(\|(h,k)\|^2) \end{aligned}$$

Théorème 12 (Formule de Taylor avec reste intégral)**.** Soient $f : U \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathscr{C}^k$ sur U, $x \in \mathbb{R}^n$, $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $[x, x+h] \subseteq U$. Alors,

$$f(x+h) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{i!} \left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right)^{(j)} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} \left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+th) \right)^{(k)} \mathrm{d}t$$

Théorème 13 (Formule de Taylor-Young)**.** Soient $f : U \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathscr{C}^k$ sur U, $x \in \mathbb{R}^n$, $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $[x, x+h] \subseteq U$. Alors,

$$f(x+h) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{i!} \left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right)^{(j)} + o(\|h\|^k)$$

Application 14 (Lemme d'Hadamard)**.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$. On suppose f différentiable en 0 avec $\mathrm{d}f_0 = 0$ et $f(0) = 0$. Alors,

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j h_{i,j}(x_1, \dots, x_n)$$

où $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $h_{i,j} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est $\mathscr{C}^\infty$.

II - Applications en analyse réelle

Dans cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et E un espace de Banach sur $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to E$ une application.

1. Étude asymptotique de fonctions

On suppose $0 \in I$.

p. 89

Définition 15. On dit que f admet un **développement limité** à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ s'il existe $a_0, \dots, a_n \in E$ tels que, au voisinage de 0,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$$

Remarque 16. On pourrait de même définir les développements limités au voisinage d'un point $a \in \overline{I}$.

Proposition 17. (i) Un développement limité, s'il existe, est unique.

(ii) Si f admet un développement limité en 0 à l'ordre $n \geq 1$, f est dérivable en 0 et sa dérivée en 0 vaut a_1.

(iii) Si f est paire (resp. impaire), les coefficients du développement limité d'indice impair (resp. pair) sont nuls.

(iv) Si f est n fois dérivable en 0, f' admet un développement limité en 0 : $f'(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^{k-1} + o(x^{n-1})$.

(v) Si f est dérivable sur I et f' admet un développement limité en 0 : $f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$; alors, f admet un développement limité en 0 donné par $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{(k+1)!} x^{k+1} + o(x^{k+1})$.

(vi) Les règles de somme, produit, quotient et composition obéissent aux mêmes règles que pour les polynômes (sous réserve de bonne définition).

On déduit du Théorème 6 le résultat suivant.

Proposition 18. Si f est n fois dérivable en 0, alors f admet un développement limité à l'ordre n en 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^{n+1})$$

Exemple 19. En 0, on a les développements limités usuels suivants.

— $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$.

— $\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$.

— $\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$.

— $\sinh(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$.

— $\cosh(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$.

— Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} + o(x^n)$.

Application 20.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x) - x}{\sin(x) - x} = -2$$

Application 21 (Développement asymptotique de la série harmonique)**.** On note $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Alors, quand n tend vers $+\infty$, [I-P] p. 380

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

2. Développements en série entière

Définition 22. Soient $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{C}$. On dit que f est **développable en série entière en** $a \in U$ s'il existe $r > 0$ et $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tels que $D(a,r) \subseteq U$ et

$$\forall z \in D(a,r),\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$$

[BMP] p. 46

Exemple 23. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Alors,

$$\forall z \in D(0,|z_0|),\ \frac{1}{z-z_0} = -\frac{1}{z_0 \sum_{n=0}^{+\infty}} \left(\frac{z}{z_0}\right)^n$$

[GOU20] p. 251

Nous nous limiterons ici aux fonctions réelles.

Proposition 24. Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle contenant un voisinage de 0. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ est développable en série entière si et seulement s'il existe $\alpha > 0$ tel que la suite de fonctions (R_n) définie par

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

tende simplement vers 0 sur $]-\alpha,\alpha[$. La série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ a alors un rayon de convergence supérieur ou égal à α et f est égale à la somme de cette série entière sur $]-\alpha,\alpha[$.

Remarque 25. Dans la pratique, pour montrer que le (R_n) précédent tend simplement vers 0, on peut l'exprimer comme un reste de Taylor (Lagrange ou intégral).

Exemple 26. On a les développements en série entière usuels suivants.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sinh(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cosh(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$.
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, Pour tout $x \in]-1,1[$, $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$.

Contre-exemple 27. La fonction

$$f : x \longmapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

est $\mathscr{C}^\infty$, vérifie $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout entier n, mais ne coïncide pas avec la somme de $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ sur $]-\alpha, \alpha[$ pour tout $\alpha > 0$.

Contre-exemple 28. On considère fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$g : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} \, \mathrm{d}t$$

Alors g est $\mathscr{C}^\infty$, vérifie $g^{(n)}(0) = 0$ pour tout entier n, et $\sum \frac{g^{(n)}(0)}{n!} z^n$ a un rayon de convergence nul.

Théorème 29 (Bernstein)**.** Soient $a > 0$ et $f :]-a, a[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$. On suppose les dérivées de f positives sur $]-a, a[$. Alors f est développable en série entière sur $]-a, a[$. [ROM18] p. 302

3. Méthode de Newton

[DEV]

Théorème 30 (Méthode de Newton)**.** Soit $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ strictement croissante sur $[c, d]$. On considère la fonction [ROU] p. 152

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [c,d] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{array}$$

(qui est bien définie car $f' > 0$). Alors :

(i) $\exists! a \in [c, d]$ tel que $f(a) = 0$.

(ii) $\exists \alpha > 0$ tel que $I = [a - \alpha, a + \alpha]$ est stable par φ.

(iii) La suite (x_n) des itérés (définie par récurrence par $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ pour tout $n \geq 0$) converge quadratiquement vers a pour tout $x_0 \in I$.

Corollaire 31. En reprenant les hypothèses et notations du théorème précédent, et en supposant de plus f strictement convexe sur $[c, d]$, le résultat du théorème est vrai sur $I = [a, d]$. De plus :

(i) (x_n) est strictement décroissante (ou constante).

(ii) $x_{n+1} - a \sim \frac{f''(a)}{2f'(a)}(x_n - a)^2$ pour $x_0 > a$.

Exemple 32. — On fixe $y > 0$. En itérant la fonction $F : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{y}{x}\right)$ pour un nombre de départ compris entre c et d où $0 < c < d$ et $c^2 < 0 < d^2$, on peut obtenir une approximation du nombre $\sqrt{y}$.

— En itérant la fonction $F : x \mapsto \frac{x^2+1}{2x-1}$ pour un nombre de départ supérieur à 2, on peut obtenir une approximation du nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4. Majoration d'une erreur d'approximation

Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle $[a, b]$. On se donne $n+1$ points $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ distincts deux-à-deux. [DEM] p. 21

Définition 33. Pour $i \in [\![0, n]\!]$, on définit le i-ième **polynôme de Lagrange** associé à $x_1, \dots, x_n$ par

$$\ell_i : x \mapsto \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Théorème 34. Il existe une unique fonction polynômiale p_n de degré n telle que $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $p_n(x_i) = f(x_i)$:

$$p_n = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i$$

Théorème 35. On note $\pi_{n+1} : x \mapsto \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$ et on suppose f $n+1$ fois dérivable $[a, b]$. Alors, pour tout $x \in [a, b]$, il existe un réel $\xi_x \in]\min(x, x_i), \max(x, x_i)[$ tel que

$$f(x) - p_n(x) = \frac{\pi_{n+1}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)$$

Corollaire 36.

$$\|f - p_n\|_\infty \leq \frac{1}{(n+1)!} \|\pi_{n+1}\|_\infty \|f^{(n+1)}\|_\infty$$

Application 37 (Calculs approchés d'intégrales)**.** On note $I(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. L'objectif est d'approximer $I(f)$ par une expression $P(f)$ et de majorer l'erreur d'approximation $E(f) = |I(f) - P(f)|$. [DAN] p. 506

(i) Méthode des rectangles. On suppose f continue. Avec $P(f) = (b-a)f(a)$, on a $E(f) \leq \frac{(b-a)^2}{2}\|f'\|_\infty$.

(ii) Méthode du point milieu. On suppose f de classe $\mathscr{C}^2$. Avec $P(f) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, on a $E(f) \leq \frac{(b-a)^3}{24}\|f''\|_\infty$.

(iii) Méthode des trapèzes. On suppose f de classe $\mathscr{C}^2$. Avec $P(f) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$, on a $E(f) \leq \frac{(b-a)^3}{12} \|f''\|_\infty$.

(iv) Méthode de Simpson. On suppose f de classe $\mathscr{C}^4$. Avec $P(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a)+f(b)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$, on a $E(f) \leq \frac{(b-a)^3}{2880} \|f^{(4)}\|_\infty$.

III - Application aux fonctions de plusieurs variables

Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert.

1. Homéomorphismes

Lemme 38. Soit $A_0 \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ inversible. Alors il existe un voisinage V de A_0 dans $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et une application $\psi : V \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que [ROU] p. 209

$$\forall A \in V, A = {}^t\psi(A) A_0 \psi(A)$$

[DEV] **Lemme 39** (Morse)**.** Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^3$ (où U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine). On suppose : p. 354

— $\mathrm{d}f_0 = 0$.

— La matrice symétrique $\mathrm{H}(f)_0$ est inversible.

— La signature de $\mathrm{H}(f)_0$ est $(p, n-p)$.

Alors il existe un difféomorphisme $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ de classe $\mathscr{C}^1$ entre deux voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$ $V \subseteq U$ et W tel que $\varphi(0) = 0$ et

$$\forall x \in U, f(x) - f(0) = \sum_{k=1}^{p} \phi_k^2(x) - \sum_{k=p+1}^{n} \phi_k^2(x)$$

Exemple 40. On considère $f : (x,y) \mapsto x^2 - y^2 + \frac{y^4}{4}$. La courbe d'équation p. 334

$$f(x,y) = 0$$

est (au changement près du nom des coordonnées) une projection de l'intersection d'un cylindre et d'une sphère tangents. On a

$$f = u^2 - v^2$$

avec $u : (x,y) \mapsto x$ et $v : (x,y) \mapsto y\sqrt{1 - \frac{y^2}{4}}$.

2. Conditions d'extrema

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.

Théorème 41. On suppose $\mathrm{d}f_a = 0$ (a est un **point critique** de f). Alors : [GOU20] p. 336

(i) Si f admet un minimum (resp. maximum) relatif en a, $\mathrm{Hess}(f)_a$ est positive (resp. négative).

(ii) Si $\mathrm{Hess}(f)_a$ définit une forme quadratique définie positive (resp. définie négative), f admet un minimum (resp. maximum) relatif en a.

Exemple 42. On suppose $\mathrm{d}f_a = 0$. On pose $(r,s,t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f\right)_{i+j=2}$. Alors :

(i) Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ (resp. $r < 0$), f admet une minimum (resp. maximum) relatif en a.

(ii) Si $rt - s^2 < 0$, f n'a pas d'extremum en a.

(iii) Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut rien conclure.

Exemple 43. La fonction $(x,y) \mapsto x^4 + y^2 - 2(x-y)^2$ a trois points critiques qui sont des minimum locaux : $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Contre-exemple 44. $x \mapsto x^3$ a sa hessienne positive en 0, mais n'a pas d'extremum en 0.

IV - Application en probabilités

Théorème 45 (Lévy)**.** Soient (X_n) une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle. Alors : [Z-Q] p. 544

$$X_n \xrightarrow{(d)} X \iff \phi_{X_n} \text{ converge simplement vers } \phi_X$$

où ϕ_Y désigne la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle Y.

Théorème 46 (Central limite)**.** Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi admettant un moment d'ordre 2. On note m l'espérance et σ^2 la variance commune à ces variables. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n - nm$. Alors, [G-K] p. 307

$$\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Application 47 (Théorème de Moivre-Laplace)**.** On suppose que (X_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{B}(p)$. Alors,

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - np}{\sqrt{n}} \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0, p(1-p))$$

Application 48 (Formule de Stirling)**.** p. 556

$$n! \sim \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Bibliographie

Objectif agrégation **[BMP]**

Vincent BECK, Jérome MALICK et Gabriel PEYRÉ. *Objectif agrégation.* 2e éd. H&K, 22 août 2005.
`https://objectifagregation.github.io`.

Mathématiques pour l'agrégation **[DAN]**

Jean-François DANTZER. *Mathématiques pour l'agrégation. Analyse et probabilités.* De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.
`https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332904-mathematiques-pour-l-agregation-analyse-et-probabilites`.

Analyse numérique et équations différentielles **[DEM]**

Jean-Pierre DEMAILLY. *Analyse numérique et équations différentielles.* 4e éd. EDP Sciences, 11 mai 2016.
`https://www.uga-editions.com/menu-principal/collections-et-revues/collections/grenoble-sciences/analyse-numerique-et-equations-differentielles-239866.kjsp`.

De l'intégration aux probabilités **[G-K]**

Olivier GARET et Aline KURTZMANN. *De l'intégration aux probabilités.* 2e éd. Ellipses, 28 mai 2019.
`https://www.editions-ellipses.fr/accueil/4593-14919-de-l-integration-aux-probabilites-2e-edition-augmentee-9782340030206.html`.

Les maths en tête **[GOU20]**

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse.* 3e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.
`https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html`.

L'oral à l'agrégation de mathématiques **[I-P]**

Lucas ISENMANN et Timothée PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements.* 2e éd. Ellipses, 26 mars 2024.
`https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html`.

Petit guide de calcul différentiel **[ROU]**

François ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel. à l'usage de la licence et de l'agrégation.* 4e éd. Cassini, 27 fév. 2015.
`https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/94-petit-guide-de-calcul-differentiel-4e-ed.html`.

Analyse pour l'agrégation **[Z-Q]**

Claude Zuily et Hervé Queffélec. *Analyse pour l'agrégation. Agrégation/Master Mathématiques.* 5e éd. Dunod, 26 août 2020.
`https://www.dunod.com/prepas-concours/analyse-pour-agregation-agregationmaster-mathematiques`.