219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

I - Existence et unicité

Définition 1. Soient U un ouvert d'un espace vectoriel normé E et $f : U \to \mathbb{R}$. [R-R] p. 210

— On dit que f admet un **maximum local** (resp. **minimum local**) en $a \in U$ si

$$\exists r > 0 \text{ tel } \forall x \in B(a,r),\ f(x) \leq f(a) (\text{resp. } f(x) \geq f(a))$$

— On dit que f admet un **extremum local** en $a \in U$ si elle admet un minimum ou un maximum local.

1. Utilisation de la compacité

Théorème 2 (Des bornes)**.** Soient E un espace compact et $f : E \to \mathbb{R}$ continue. Alors, il existe deux éléments a et b de E vérifiant [GOU20] p. 31

$$f(a) = \inf_{x \in E} f(x) \text{ et } f(b) = \sup_{x \in E} f(x)$$

Contre-exemple 3. La fonction [HAU] p. 202

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{(-1)^q(q-1)}{q} & \text{si } x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \text{ avec } \frac{p}{q} \text{ le représentant irréductible de } x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

est minorée par -1, majorée par 1, mais n'atteint ses bornes sur aucun intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$.

Corollaire 4. Soient (E,d) un espace métrique et K_1, K_2 deux compacts de E. Alors, [GOU20] p. 33

$$\exists (x_1,x_2) \in K_1 \times K_2 \text{ tel que } d(x_1,x_2) = \inf_{(x,y) \in K_1 \times K_2} d(x,y)$$

Corollaire 5 (Théorème du point fixe de Picard)**.** Soit (E,d) un espace métrique compact et $f : E \to E$ telle que [ROU] p. 171

$$\forall x,y \in E,\ x \neq y \implies d(f(x),f(y)) < d(x,y)$$

alors f admet un unique point fixe et pour tout $x_0 \in E$, la suite des itérés

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

converge vers ce point fixe.

Exemple 6. sin admet un unique point fixe sur $[0,1]$.

Contre-exemple 7. La fonction [GOU20] p. 35

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x + \frac{1}{1+x} & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

est continue, contractante et sans point fixe.

Corollaire 8 (Théorème de Heine)**.** Une application continue sur un compact y est uniformément continue. p. 31

Application 9 (Théorème de d'Alembert-Gauss)**.** Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}$ admet une racine dans $\mathbb{C}$. [DAN] p. 58

2. Utilisation de la convexité

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle non réduit à un point.

Proposition 10. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est constante si et seulement si elle est convexe et majorée. [ROM19-1] p. 234

Contre-exemple 11. La fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \frac{1}{1+x}$ est convexe, majorée, mais non constante.

Proposition 12. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe et est dérivable en un point $\alpha \in \mathring{I}$ tel que $f'(\alpha) = 0$, alors f admet un minimum global en α.

Proposition 13. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe et admet un minimum local, alors ce minimum est global.

3. Utilisation de l'holomorphie

Soient Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$. [QUE] p. 102

Proposition 14 (Inégalités de Cauchy)**.** On suppose f holomorphe au voisinage du disque $\overline{D}(a, R)$. On note c_n les coefficients du développement en série entière de f en a. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall r \in [0, R],\ |c_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$$

où $M(r) = \sup_{|z-a|=r} |f(z)|$.

Corollaire 15 (Théorème de Liouville)**.** On suppose f holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier. Si f est bornée, alors f est constante.

p. 107

Théorème 16 (Principe du maximum)**.** On suppose Ω borné et f holomorphe dans Ω et continue dans $\overline{\Omega}$. On note M le sup de f sur la frontière (compacte) de Ω. Alors,

$$\forall z \in \Omega,\ |f(z)| \leq M$$

4. Utilisation de propriétés hilbertiennes

Soit H un espace de Hilbert de norme $\|.\|$ et on note $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire associé. [LI] p. 32

Lemme 17 (Identité du parallélogramme)**.**

$$\forall x, y \in H,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 \|y\|^2)$$

et cette identité caractérise les normes issues d'un produit scalaire.

[DEV]

Théorème 18 (Projection sur un convexe fermé)**.** Soit $C \subseteq H$ un convexe fermé non-vide. Alors :

$$\forall x \in H, \exists! y \in C \text{ tel que } d(x, C) = \inf_{z \in C} \|x - z\| = d(x, y)$$

On peut donc noter $y = P_C(x)$, le **projeté orthogonal de x sur C**. Il s'agit de l'unique point de C vérifiant

$$\forall z \in C,\ \langle x - P_C(x), z - P_C(x) \rangle \leq 0$$

Théorème 19. Si F est un sous espace vectoriel fermé dans H, alors P_F est une application linéaire continue. De plus, pour tout $x \in H$, $P_F(x)$ est l'unique point $y \in F$ tel que $x - y \in F^{\perp}$.

Application 20. Soit F un sous-espace vectoriel de H. Alors,

$$\overline{F} = H \iff F^{\perp} = 0$$

Application 21 (Théorème de représentation de Riesz)**.**

$$\forall \varphi \in H', \exists! y \in H, \text{ tel que } \forall x \in H, \varphi(x) = \langle x, y \rangle$$

et de plus, $|||\varphi||| = \|y\|$.

Corollaire 22.

$$\forall T \in H', \exists! U \in H' \text{ tel que } \forall x, y \in H, \langle T(x), y \rangle = \langle x, U(y) \rangle$$

On note alors $U = T^*$: c'est **l'adjoint** de T. On a alors $|||T||| = |||T^*|||$.

II - Extrema et calcul différentiel

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable en un point a de U, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

1. Condition du premier ordre

Définition 23. Si $\mathrm{d}f_a = 0$, on dit que a est un **point critique** de f. **[R-R]** p. 210

Remarque 24. Cela revient à dire que toutes les dérivées partielles de f s'annulent en a.

Proposition 25. Si f admet un extremum local en a, alors a est un point critique de f.

Contre-exemple 26. $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$ a un point critique en $(0,0)$, mais n'a pas d'extremum en $(0,0)$. **[HAU]** p. 281

2. Condition du second ordre

On suppose f de classe $\mathscr{C}^2$ sur U. **[GOU20]** p. 336

Définition 27. La matrice **hessienne** de f en a, notée $\mathrm{Hess}(f)_a$, est définie par

$$\mathrm{Hess}(f)_a = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j \in [\![1,n]\!]}$$

Remarque 28. Pour f de classe $\mathscr{C}^2$, $\text{Hess}(f)_a$ est symétrique.

Théorème 29. On suppose $\mathrm{d}f_a = 0$. Alors :

(i) Si f admet un minimum (resp. maximum) relatif en a, $\text{Hess}(f)_a$ est positive (resp. négative).

(ii) Si $\text{Hess}(f)_a$ définit une forme quadratique définie positive (resp. définie négative), f admet un minimum (resp. maximum) relatif en a.

Exemple 30. On suppose $\mathrm{d}f_a = 0$. On pose $(r, s, t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f\right)_{i+j=2}$. Alors :

(i) Si $rt - s^2 > 0$ (resp. < 0), f admet une minimum (resp. maximum) relatif en a.

(ii) Si $rt - s^2 < 0$ (resp. < 0), f n'a pas d'extremum en a.

(iii) Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut rien conclure.

Exemple 31. La fonction $(x, y) \mapsto x^4 + y^2 - 2(x-y)^2$ a trois points critiques qui sont des minimum locaux : $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Contre-exemple 32. $x \mapsto x^3$ a sa hessienne positive en 0, mais n'a pas d'extremum en 0.

3. Extrema liés

Théorème 33 (Extrema liés)**.** Soient $f, g_1, \dots, g_r : U \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. On note $\Gamma = \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$. Si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$ et si les formes linéaires $\mathrm{d}(g_1)_a, \dots, \mathrm{d}(g_r)_a$ sont linéairement indépendantes, alors il existe des uniques $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ tels que p. 337

$$\mathrm{d}f_a = \lambda_1 \mathrm{d}(g_1)_a + \dots + \lambda_r \mathrm{d}(g_r)_a$$

Définition 34. Les $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ du théorème précédent sont appelés appelés **multiplicateurs de Lagrange**.

Remarque 35. La relation finale du Théorème 33 équivaut à [BMP] p. 21

$$\bigcap_{i=1}^{n} \text{Ker}(\mathrm{d}(g_i)_a) \subseteq \text{Ker}(\mathrm{d}f_a)$$

et elle exprime que $\mathrm{d}f_a$ est nulle sur l'espace tangent à Γ en a (ie. ∇f_a est orthogonal à l'espace tangent à Γ en a).

Contre-exemple 36. On pose $g : (x, y) \mapsto x^3 - y^2$ et on considère $f : (x, y) \mapsto x + y^2$. On cherche à minimiser f sous la contrainte $g(x, y) = 0$.

Alors, le minimum (global) de f sous cette contrainte est atteint en $(0, 0)$, la différentielle de g en $(0, 0)$ est nulle et la relation finale du Théorème 33 n'est pas vraie.

Application 37 (Théorème spectral)**.** Tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien se diagonalise dans une base orthonormée.

Application 38. p. 35

$$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \|M\|^2 = \inf_{P \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})} \|P\|^2 \right\}$$

où $\|.\| : M \mapsto \sqrt{\mathrm{trace}({}^t M M)}$ (ie. $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ qui minimisent la norme euclidienne canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

Application 39 (Inégalité arithmético-géométrique)**.** [GOU20] p. 339

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n, \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Application 40 (Inégalité d'Hadamard)**.** [ROU] p. 409

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \det(x_1, \dots, x_n) \leq \|x_1\| \dots \|x_n\|$$

avec égalité si et seulement si $(x_1, \dots, x_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

III - Algorithmes d'optimisation numérique

1. Méthode de Newton

[DEV] **Théorème 41** (Méthode de Newton)**.** Soit $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ strictement croissante sur $[c, d]$. On considère la fonction [ROU] p. 152

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [c, d] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{array}$$

(qui est bien définie car $f' > 0$). Alors :

(i) $\exists! a \in [c, d]$ tel que $f(a) = 0$.
(ii) $\exists \alpha > 0$ tel que $I = [a - \alpha, a + \alpha]$ est stable par φ.
(iii) La suite (x_n) des itérés (définie par récurrence par $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ pour tout $n \geq 0$) converge quadratiquement vers a pour tout $x_0 \in I$.

Corollaire 42. En reprenant les hypothèses et notations du théorème précédent, et en supposant de plus f strictement convexe sur $[c, d]$, le résultat du théorème est vrai sur $I = [a, d]$. De plus :

(i) (x_n) est strictement décroissante (ou constante).
(ii) $x_{n+1} - a \sim \frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n - a)^2$ pour $x_0 > a$.

Exemple 43.
— On fixe $y > 0$. En itérant la fonction $F : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{y}{x}\right)$ pour un nombre de départ compris entre c et d où $0 < c < d$ et $c^2 < 0 < d^2$, on peut obtenir une approximation du nombre $\sqrt{y}$.
— En itérant la fonction $F : x \mapsto \frac{x^2+1}{2x-1}$ pour un nombre de départ supérieur à 2, on peut obtenir une approximation du nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. Lien avec les systèmes linéaires

Proposition 44. Soient $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On pose $f : x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle$. Alors, minimiser f sur $\mathbb{R}^n$ revient à résoudre le système linéaire $Ax = b$. [BMP] p. 24

Bibliographie

Objectif agrégation **[BMP]**

Vincent Beck, Jérome Malick et Gabriel Peyré. *Objectif agrégation.* 2e éd. H&K, 22 août 2005.
https://objectifagregation.github.io.

Mathématiques pour l'agrégation **[DAN]**

Jean-François Dantzer. *Mathématiques pour l'agrégation. Analyse et probabilités.* De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.
https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332195-mathematiques-pour-l-agregation-analyse-et-probabilites.

Les maths en tête **[GOU20]**

Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Analyse.* 3e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html.

Les Contre-Exemples en Mathématiques **[HAU]**

Bertrand Hauchecorne. *Les Contre-Exemples en Mathématiques.* 2e éd. Ellipses, 13 juin 2007.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/5328-les-contre-exemples-en-mathematiques-9782729834180.html.

Cours d'analyse fonctionnelle **[LI]**

Daniel Li. *Cours d'analyse fonctionnelle. avec 200 exercices corrigés.* Ellipses, 3 déc. 2013.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/6558-cours-danalyse-fonctionnelle-avec-200-exercices-corriges-9782729883058.html.

Analyse complexe et applications **[QUE]**

Martine Queffféllec et Hervé Queffélec. *Analyse complexe et applications. Nouveau tirage.* Calvage & Mounet, 13 mai 2017.
http://www.calvage-et-mounet.fr/2022/05/09/analyse-complexe-et-applications/.

Formulaire de maths **[R-R]**

Olivier Rodot et Jean-Étienne Rombaldi. *Formulaire de maths. Avec résumés de cours.* De Boeck Supérieur, 30 août 2022.
https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807339880-formulaire-de-maths.

Éléments d'analyse réelle **[ROM19-1]**

Jean-Étienne Rombaldi. *Éléments d'analyse réelle.* 2e éd. EDP Sciences, 6 juin 2019.
https://laboutique.edpsciences.fr/produit/1082/9782759823789/elements-d-analyse-reelle.

Petit guide de calcul différentiel **[ROU]**

François Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel. à l'usage de la licence et de l'agrégation.* 4^{e} éd. Cassini, 27 fév. 2015.
https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/94-petit-guide-de-calcul-differentiel-4e-ed.html.