

## 221 Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Dans toute la suite,  $\mathbb{K}$  désignera le corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### I - Généralités

#### 1. Définitions

**Définition 1.** Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $E$  un espace de Banach et  $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times E^n$  un ouvert. Soit  $F : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow E$  une fonction.

— On appelle **équation différentielle** une équation de la forme

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (*)$$

(ie. une équation portant sur les dérivées d'une fonction.)

— Toute application  $\varphi : I \rightarrow E$  (où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ )  $n$  fois dérivable vérifiant :

- (i)  $\forall t \in I, (t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in \Omega$ ;
- (ii)  $\forall t \in I, F(t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) = \varphi^{(n)}(t)$ ;

est une **solution** de (\*). On note  $\mathcal{S}_*$  l'ensemble des solutions de (\*).

— Une solution  $\varphi : I \rightarrow E$  de (\*) est dite **maximale** s'il n'existe pas d'autre solution  $\psi : J \rightarrow E$  (où  $J$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ ) de (\*) telle que  $I \subseteq J, I \neq J$  et  $\psi = \varphi$  sur  $I$ .

— On appelle **problème de Cauchy** de (\*) en  $(t_0, x_0, \dots, x_{n-1})$  la recherche d'une solution  $\varphi : I \rightarrow E$  de (\*) vérifiant

$$\forall t_0 \in I, \varphi(t_0) = x_0, \dots, \varphi^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$$

[GOU20]  
p. 373

**Définition 2.** Toute équation différentielle sur  $\mathbb{K}^n$  d'ordre  $p \geq 1$  du type

$$Y^{(p)} = A_{p-1}(t)Y^{(p-1)} + \dots + A_0(t)Y + B(t) \quad (L)$$

(où  $A_{p-1}, \dots, A_0$  sont des fonctions continues d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  non réduit à un point dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $B : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  est une fonction continue) est appelée **équation différentielle linéaire** d'ordre  $p$ .

Si de plus  $B = 0$ , alors (L) est qualifiée d'**homogène**.

p. 377

**Définition 3.** Si  $n \geq 2$ , on parle de **système différentiel linéaire**. Si  $n = 1$ , on parle d'équation différentielle linéaire **scalaire**.

*Remarque 4.* L'équation (L) précédente peut aussi s'écrire :

$$\begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \vdots \\ Y^{(p-1)} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & I_n \\ A_0(t) & \dots & \dots & \dots & A_{p-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \vdots \\ Y^{(p-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ B(t) \end{pmatrix}$$

Ainsi, nous avons ramené l'équation différentielle linéaire (L) d'ordre  $p$  à une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Donc, pour cette raison, on peut se limiter à l'étude des équations différentielles linéaires d'ordre 1.

## 2. Structure de l'ensemble des solutions

[DEV]

**Théorème 5** (Cauchy-Lipschitz linéaire). Soient  $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $B : I \rightarrow \mathbb{K}^d$  deux fonctions continues. Alors  $\forall t_0 \in I$ , le problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y' = A(t)Y + B(t) \\ Y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur  $I$  tout entier.

[DAN]  
p. 520

*Remarque 6* (Version linéaire d'ordre  $p$ ). Soient  $A_{p-1}, \dots, A_0$  des fonctions continues d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  non réduit à un point dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $B : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  une fonction continue. Soient  $X_0, \dots, X_{p-1} \in \mathbb{K}^n$ . Alors,  $\forall t_0 \in I$ , le problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y^{(p)} = A_{p-1}(t)Y^{(p-1)} + \dots + A_0(t)Y + B(t) \\ Y^{(k)}(t_0) = X_k \end{cases} \quad \forall k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$$

admet une unique solution définie sur  $I$  tout entier.

[GOU20]  
p. 378

**Exemple 7.** Considérons l'équation  $y' - y = 0$ . Comme la fonction nulle est solution maximale, il s'agit de l'unique solution qui s'annule sur  $\mathbb{R}$ .

[ROM19-1]  
p. 402

**Corollaire 8.** L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre  $p$  défini sur un intervalle  $I$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$  de dimension  $np$ .

[GOU20]  
p. 278

**Corollaire 9.** Soit  $(H)$  l'équation différentielle linéaire homogène associée à une équation différentielle linéaire  $(L)$  et soit  $V_0 \in \mathcal{S}_L$ . Alors  $\mathcal{S}_L = V_0 + \mathcal{S}_H$ , et  $\mathcal{S}_L$  est un espace affine de même dimension que  $\mathcal{S}_H$ .

### 3. Wronskien

**Définition 10.** Soient  $V_1, \dots, V_n$   $n$  solutions d'une équation différentielle linéaire homogène  $(H)$  définies sur un intervalle  $I$ . On appelle **wronskien** de  $V_1, \dots, V_n$  l'application

$$W_{(V_1, \dots, V_n)} : \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{K} \\ t \mapsto \det(V_1(t), \dots, V_n(t)) \end{array}$$

**Exemple 11.** Soient  $v_1, \dots, v_p$   $p$  solutions de  $y^{(p)} = a_{p-1}(t)y^{(p-1)} + \dots + a_0(t)y$  définies sur un intervalle  $I$  (où  $\forall i, a_i : I \rightarrow \mathbb{K}$  est continue). Alors

$$\forall t \in I, W_{(v_1, \dots, v_p)}(t) = \begin{vmatrix} v_1(t) & \dots & v_p(t) \\ \vdots & & \vdots \\ v_1^{(p-1)}(t) & \dots & v_p^{(p-1)}(t) \end{vmatrix}$$

**Exemple 12.** Soient  $u$  et  $v$  deux solutions de  $y'' = a(t)y' + b(t)y$  définies sur un intervalle  $I$ . Alors

$$\forall t \in I, W_{(u, v)}(t) = u(t)v'(t) - u'(t)v(t)$$

**Proposition 13.** Le rang de  $n$  solutions d'une équation différentielle linéaire homogène  $V_1(t), \dots, V_n(t)$  est indépendant de  $t$ .

**Corollaire 14.** Soient  $V_1, \dots, V_n$   $n$  solutions d'une équation différentielle linéaire homogène  $(H)$ . Alors  $(V_1, \dots, V_n)$  est une base de  $\mathcal{S}_H$  si et seulement si  $\exists t_0$  tel que  $W_{(V_1, \dots, V_n)}(t_0) \neq 0$ .

**Proposition 15.** Soient  $V_1, \dots, V_n$   $n$  solutions d'une équation différentielle linéaire homogène  $(H)$ . Alors  $W_{(V_1, \dots, V_n)}$  est solution de l'équation différentielle linéaire homogène

$$Y' = \text{trace}(A)Y$$

et pour tout  $t_0$  élément de  $I$ , on a  $\forall t \in I, W_{(V_1, \dots, V_n)}(t) = W_{(V_1, \dots, V_n)}(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \text{trace}(A(u)) du\right)$ .

## II - Résolution

### 1. Cas d'une équation différentielle linéaire scalaire

**Proposition 16.** Les solutions d'une équation différentielle linéaire homogène scalaire  $y' = a(t)y$  sont proportionnelles à  $t \mapsto e^{A(t)}$  où  $A$  est une primitive de  $a$ .

**Corollaire 17** (Variation de la constante). Soient  $(L) : y' = a(t)y + b(t)$  une équation différentielle linéaire scalaire et  $A$  une primitive de  $a$ . Alors,

$$\mathcal{S}_L = \{t \mapsto \lambda(t)e^{A(t)} \mid \lambda'(t) = b(t)e^{-A(t)}\}$$

**Exemple 18.** L'ensemble des solutions de l'équation différentielle  $(L) : y' + y = \sin(t)$  est

$$\mathcal{S}_L = \left\{ t \mapsto \frac{\sin(t) - \cos(t)}{2} + \mu e^{-t} \mid \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

**Exemple 19.** À cause du principe de "recollement" des solutions, la seule solution définie sur  $\mathbb{R}$  de  $(1 - t^2)y' + ty = 0$  est la fonction nulle.

### 2. Cas d'un système différentiel linéaire

**Proposition 20.** Soient  $V_1, \dots, V_n$   $n$  solutions linéairement indépendantes d'une équation différentielle linéaire homogène  $(H) : Y' = A(t)Y$ . Alors,

$$\mathcal{S}_H = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i V_i \mid \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}$$

**Corollaire 21** (Variation de la constante). Soit  $(L) : Y' = A(t)Y + B(t)$  une équation différentielle linéaire. On note par  $(H)$  l'équation différentielle linéaire homogène associée. Alors, si  $V_1, \dots, V_n$  sont  $n$  solutions de  $(H)$ , on a :

$$\mathcal{S}_L = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i(t)V_i \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i'(t)V_i(t) = B(t) \right\}$$

**Exemple 22.** Soit  $(L) : y'' = a(t)y' + b(t)y + c(t)$ . On note  $u$  et  $v$  deux solutions de l'équation

différentielle linéaire homogène associée. Alors,

$$\mathcal{S}_L = \left\{ t \mapsto \lambda(t)u(t) + \mu(t)v(t) \mid \begin{cases} \lambda'u + \mu'v = 0 \\ \lambda'u' + \mu'v' = c \end{cases} \right\}$$

**Exemple 23.** On considère l'équation différentielle  $(L) : y'' + y = \tan(t)$ . Alors,

$$\mathcal{S}_L = \left\{ t \mapsto \alpha \cos(t) + \beta \sin(t) - \cos(t) \ln \left( \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right) \right) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

### 3. Cas où les coefficients sont constants

**Définition 24.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On définit

$$e^A = \exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

l'**exponentielle** de la matrice  $A$ .

**Proposition 25.** Une équation différentielle linéaire homogène  $(H) : Y' = AY$  (où  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est constante en  $t$ ) a ses solutions maximales définies sur  $\mathbb{R}$  et le problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = y_0 \end{cases}$$

a pour (unique) solution  $t \mapsto e^{tA}y_0$ .

*Remarque 26.* En reprenant les notations précédentes, si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , on peut réduire  $A$  dans  $\mathbb{C}$  puis écrire les solutions de  $(H)$  sous la forme  $\varphi(t) + \overline{\varphi(t)}$  (où  $\varphi$  est une solution complexe de  $(H)$ ).

**Corollaire 27.** On considère une équation différentielle linéaire homogène  $(H) : y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = 0$ . On factorise  $P_H$ , le **polynôme caractéristique** de l'équation dans  $\mathbb{C}$ ,

$$P_H = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0 = \prod_{i=1}^k (X - r_i)^{m_i}$$

Alors,

$$\mathcal{S}_H = \left\{ t \mapsto \sum_{i=1}^k e^{r_i t} P_i(t) \right\}$$

où les  $P_i$  sont des polynômes de degré  $< m_i$ .

**Exemple 28.** On considère l'équation différentielle  $(H) : y'' + ay' + by = 0$ . Soient  $r_1$  et  $r_2$  les deux racines de  $P_H$  dans  $\mathbb{C}$ .

- Si  $r_1 \neq r_2$ ,  $\mathcal{S}_H = \{t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}$ .
- Si  $r_1 = r_2$ ,  $\mathcal{S}_H = \{t \mapsto (\lambda t + \mu)e^{r_1 t} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}$ .

## 4. Quelques autres techniques de résolution

### a. Abaissement de l'ordre

**Proposition 29.** On considère une équation différentielle linéaire homogène  $(H) : y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)y$ . Soit  $\varphi \in \mathcal{S}_H$ , alors  $f = g\varphi$  est solution de  $(H)$  si et seulement si

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} g^{(k)} \varphi^{(n-k)} = a_{n-1}(t) \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} g^{(k)} \varphi^{(n-1-k)} + \dots + a_1(t)(g'\varphi)$$

ie.  $g'$  est solution d'une équation différentielle d'ordre  $n-1$ .

**Exemple 30.** Soit  $\varphi$  une solution de  $(H) : y'' = a(t)y' + b(t)y$ , alors  $f = g\varphi$  est solution de  $(H)$  si et seulement si  $2g'\varphi' + g''\varphi = a(t)g'\varphi$ .

### b. Utilisation des séries entières

**Proposition 31.** Soient  $a_0, \dots, a_{p-1}$  et  $b$  des fonctions à valeurs dans  $\mathbb{K}$  développables en série entière sur un intervalle ouvert  $] -R, R[$  ( $R$  étant un réel strictement positif). Soient  $y_0, \dots, y_{p-1} \in \mathbb{C}$ . On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y^{(p)} = a_0(t)y + \dots + a_{p-1}(t)y^{(p-1)} + b(t) \\ y^{(k)}(0) = y_k \end{cases} \quad \forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket \quad (*)$$

Alors  $(*)$  admet une unique solution développable en série entière sur  $] -R, R[$ .

**Exemple 32.** La fonction  $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  est l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' = -y \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

[ROM19-1]  
p. 401

**Application 33.** La fonction  $f_\alpha : x \mapsto (1+x)^\alpha$  où  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$  est développable en série entière de rayon de convergence 1 et

$$\forall x \in ]-1, 1[, f_\alpha(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

### III - Études qualitatives

**Lemme 34** (Gronwall). Soient  $\varphi, \psi, y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$  continues vérifiant  $\forall t \in [a, b], y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)y(s) ds$ . Alors,

$$\forall t \in I, y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s) \exp\left(\int_s^t \psi(u) du\right) ds$$

[GOU20]  
p. 397

**Corollaire 35.** Soient  $\varphi, y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$  continues et vérifiant  $\exists c \geq 0, \forall t \in [a, b], y(t) \leq c + \int_a^t \varphi(s)y(s) ds$ . Alors,

$$\forall t \in [a, b], y(t) \leq c \exp\left(\int_a^t \varphi(s) ds\right)$$

**Application 36.** Soit  $q : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}_*^+$  croissante de classe  $\mathcal{C}^1$ . Alors les solutions de  $y'' + q(t)y = 0$  sont bornées sur  $\mathbb{R}^+$ .

**Théorème 37** (Floquet). On considère l'équation  $(H) : Y' = A(t)Y$  où  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction continue et  $T$ -périodique. Alors,  $(H)$  admet une solution  $V$  non nulle telle que

$$\exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall t \in \mathbb{R}, V(t+T) = \lambda V(t)$$

p. 387

**Théorème 38** (Massera). Si l'équation  $Y' = A(t)Y + B(t)$  (où  $A$  et  $B$  sont  $T$ -périodiques) admet une solution bornée sur  $\mathbb{R}$ , alors elle admet une solution  $T$ -périodique.

p. 406

### IV - Applications

#### a. Résolution d'équations différentielles non linéaires

**Application 39** (Équations de Bernoulli). Soit  $(B) : y' = a(t)y + b(t)y^\alpha$  (où  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ). On pose  $z = y^{1-\alpha}$  et on a

$$(B) \iff \frac{1}{1-\alpha} z' = a(t)z + b(t)$$

p. 391

**Corollaire 40** (Équations de Ricatti). Soit  $(R) : y' = a(t)y^2 + b(t)y + c(t)$  qui admet pour solution particulière  $\varphi_0$ . On pose  $y = \varphi_0 + z$  et on a

$$(R) \iff (2a(t)\varphi_0(t) + b(t))z + a(t)z^2$$

qui est une équation de Bernoulli.

**Exemple 41.** Les solutions maximales de l'équation  $y' + y + y^2 + 1 = 0$  sont de la forme  $t \mapsto e^{\frac{2i\pi}{3}} + \frac{\sqrt{3}}{e^{i(\sqrt{3}t+\theta)+i}}$ , définies que des intervalles ouverts de longueur  $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ .

## b. Stabilité

**Application 42** (Théorème de stabilité de Liapounov). Soit  $f : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$  telle que  $f(0) = 0$ . On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Si toute valeur propre complexe de  $df_0$  est de partie réelle strictement négative, alors  $\forall y_0$  suffisamment proche de 0, la solution maximale  $y(t)$  est bien définie et converge vers 0 en  $+\infty$  à une vitesse exponentielle.

[I-P]  
p. 302

## c. Étude d'équations fonctionnelles et matricielles

**Application 43.** L'ensemble des fonctions  $f : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant  $\forall t > 0, f'(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$  est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène  $t^2 y'' + y = 0$ .

[GOU20]  
p. 384

**Lemme 44.** Soit  $\|\cdot\|$  une norme d'algèbre sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , et soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice dont les valeurs propres sont de partie réelle strictement négative. Alors il existe une fonction polynômiale  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\lambda > 0$  tels que  $\|e^{tA}\| \leq e^{-\lambda t} P(t)$ .

[I-P]  
p. 177

**Application 45** (Équation de Sylvester). Soient  $A$  et  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  deux matrices dont les valeurs propres sont de partie réelle strictement négative. Alors pour tout  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , l'équation  $AX + XB = C$  admet une unique solution  $X$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

[DEV]



# Bibliographie

## **Mathématiques pour l'agrégation**

[DAN]

Jean-François DANTZER. *Mathématiques pour l'agrégation. Analyse et probabilités*. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332195-mathematiques-pour-l-agregation-analyse-et-probabilites>.

## **Les maths en tête**

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.

## **L'oral à l'agrégation de mathématiques**

[I-P]

Lucas ISENMANN et Timothée PECATTE. *L'oral à l'agrégation de mathématiques. Une sélection de développements*. 2<sup>e</sup> éd. Ellipses, 26 mars 2024.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/15218-28346-loral-a-lagregation-de-mathematiques-une-selection-de-developpements-2e-edition-9782340086487.html>.

## **Éléments d'analyse réelle**

[ROM19-1]

Jean-Étienne ROMBALDI. *Éléments d'analyse réelle*. 2<sup>e</sup> éd. EDP Sciences, 6 juin 2019.

<https://laboutique.edpsciences.fr/produit/1082/9782759823789/elements-d-analyse-reelle>.