228 Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

I - Continuité et dérivabilité

1. Continuité

Définition 1. — f est **continue au point** $a \in I$ si [ROM19] p. 163

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x-a| < \eta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

— f est **continue sur** I si f est continue en tout point de I.

Exemple 2. Pour tout entier n, $x \mapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème 3 (Caractérisations séquentielle et topologique de la continuité). (i) f est continue en $a \in I$ si et seulement si toute suite de points de I qui converge vers a est transformée par f en une suite convergente vers $f(a)$.

(ii) f est continue en $a \in I$ si et seulement si l'image réciproque par f de tout ouvert (resp. fermé) de $\mathbb{R}$ est un ouvert (resp. fermé) de I.

Exemple 4. La fonction $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}_*$ n'est pas continue en 0.

Proposition 5. Si f et g sont deux fonctions définies sur I à valeurs réelles et continues en $a \in I$, alors $|f|$, $f+g$, fg, $\min(f,g)$ et $\max(f,g)$ sont continues en a.

2. Uniforme continuité

Définition 6. f est **uniformément continue sur** I si [GOU20] p. 12

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in I, |x-y| < \eta \implies |f(x) - f(y) < \epsilon$$

Remarque 7. En particulier, une fonction uniformément continue sur un intervalle est continue sur ce même intervalle.

Exemple 8. Une fonction lipschitzienne sur I est uniformément continue sur I.

Contre-exemple 9. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $]0,1]$ est continue mais n'est pas uniformément continue.

Proposition 10. On se place dans le cas où $I = \mathbb{R}^+$ et on suppose f uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$. Alors, p. 18

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}_*^+ \text{ tels que } \forall x \in \mathbb{R}^+, |f(x)| \leq \alpha x + \beta$$

Théorème 11 (Prolongement des applications uniformément continues)**.** Soit $J \subseteq I$ dense dans I et soit $g : J \to \mathbb{R}$ uniformément continue sur J. Alors, p. 24

$$\exists ! h : I \to \mathbb{R} \text{ uniformément continue et telle que } h_{|J} = g$$

3. Dérivabilité

Définition 12. On dit que f est **dérivable en** $a \in I$ si p. 71

$$\lim_{\substack{t \to a \\ t \neq a}} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

existe. Lorsque cette limite existe, elle est notée $f'(a)$.

Remarque 13.
— De même, f est **dérivable à gauche (resp. à droite) en** $a \in I$ si $\lim_{\substack{t \to a \\ t < a \\ t \in I}} \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ existe (resp. $\lim_{\substack{t \to a \\ t > a \\ t \in I}} \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ existe). On la note alors $f'_g(a)$ (resp. $f'_d(a)$).
— f est dérivable en $a \in I$ si et seulement si f est dérivable à gauche, à droite et $f'_g(a) = f'_d(a)$.
— f est dérivable en $a \in I$ si et seulement si, quand x tend vers a,

$$\exists \ell \in \mathbb{R}, f(x) = f(a) + (x - a)\ell + o(x - a)$$

Proposition 14. Si f est dérivable en $a \in I$, alors f est continue en a.

Contre-exemple 15. On note Δ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ 1-périodique et telle que la restriction à $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ vérifie $\Delta(x) = |x|$. Alors, p. 86

$$f : x \mapsto \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p} \Delta(2^p x)$$

est bien définie, continue sur $\mathbb{R}$, mais dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.

Remarque 16. La fonction dérivée $f' : x \mapsto f'(x)$ n'est pas forcément continue là où elle est définie. p. 72

Exemple 17. La fonction $x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si x } \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable, de dérivée $x \mapsto \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si x } \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ définie sur $\mathbb{R}$ mais non continue en 0.

Proposition 18. Si f et g sont deux fonctions définies sur I à valeurs réelles et dérivables en $a \in I$. Alors :

(i) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$.

(ii) fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

(iii) Si $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

Définition 19. On dit que f est **de classe $\mathscr{C}^n$ sur** I si $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $f^{(k)}$ (la dérivée k-ième de f) existe et continue.

Proposition 20 (Formule de Leibniz)**.** Soit $a \in I$. Si f et g sont deux fonctions définies sur I à valeurs réelles et qui admettent une dérivée n-ième en a,

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a)$$

Proposition 21. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to I$ sont deux fonctions, alors, en supposant f dérivable en a et g dérivable en $f(a)$, $(f \circ g)$ est dérivable en a et,

$$(f \circ g)'(a) = g'(a)(f' \circ g)(a)$$

Corollaire 22. Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $h : I \to J$ une bijection dérivable en $a \in I$. Alors, h^{-1} est dérivable en $b = h(a)$ si et seulement si $h'(a) \neq 0$, et on a,

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Corollaire 23. La composée de deux applications de classe $\mathscr{C}^n$ est de classe $\mathscr{C}^n$.

II - Fonctions particulières qui sont dérivables ou continues

1. Fonctions convexes

Définition 24. f est **convexe** si

$$\forall x, y \in I, \forall t \in [0,1], f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

[ROM19] p. 225

Exemple 25.
— $x \mapsto |x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
— exp est convexe sur $\mathbb{R}$.

Proposition 26. Si f est convexe, elle possède en tout point de $\mathring{I}$ une dérivée à droite et une dérivée à gauche. Elle est donc continue sur $\mathring{I}$. De plus les applications dérivées à gauche f'_g et à droite f'_d sont croissantes avec $f'_g(x) \leq f'_d(x)$ pour tout $x \in \mathring{I}$.

[GOU20] p. 96

Proposition 27. On suppose f deux fois dérivable. Alors, f est convexe si et seulement si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.

[DEV]

Application 28 (Méthode de Newton)**.** Soit $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ strictement croissante sur $[c,d]$. On considère la fonction

[ROU] p. 152

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [c,d] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \frac{g(x)}{g'(x)} \end{array}$$

(qui est bien définie car $g' > 0$). Alors :

(i) $\exists! a \in [c,d]$ tel que $g(a) = 0$.

(ii) $\exists \alpha > 0$ tel que $I = [a-\alpha, a+\alpha]$ est stable par φ.

(iii) La suite (x_n) des itérés (définie par récurrence par $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ pour tout $n \geq 0$) converge quadratiquement vers a pour tout $x_0 \in I$.

Corollaire 29. En reprenant les hypothèses et notations du théorème précédent, et en supposant de plus g strictement convexe sur $[c,d]$, le résultat du théorème est vrai sur $I = [a,d]$. De plus :

(i) (x_n) est strictement décroissante (ou constante).

(ii) $x_{n+1} - a \sim \frac{g''(a)}{g'(a)}(x_n - a)^2$ pour $x_0 > a$.

Exemple 30. — On fixe $y > 0$. En itérant la fonction $F : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{y}{x}\right)$ pour un nombre de départ compris entre c et d où $0 < c < d$ et $c^2 < 0 < d^2$, on peut obtenir une approximation du nombre $\sqrt{y}$.
— En itérant la fonction $F : x \mapsto \frac{x^2+1}{2x-1}$ pour un nombre de départ supérieur à 2, on peut obtenir une approximation du nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. Fonction monotones

Définition 31. — On dit que f est **croissante** si $\forall x, y \in I$, $x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$. [R-R] p. 31
— On dit que f est **décroissante** si $\forall x, y \in I$, $x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$.
— On dit que f est **monotone** si f est croissante ou décroissante.

Définition 32. Si $a \in \mathring{I}$, et si f est discontinue en a avec des limites à gauche et à droite en ce point, on dit que f a une **discontinuité de première espèce** en a. [ROM19] p. 163

Proposition 33. Une fonction monotone de I dans $\mathbb{R}$ ne peut avoir que des discontinuités de première espèce.

Théorème 34. On suppose que I est un intervalle ouvert. Si f est une fonction monotone, alors l'ensemble des points de discontinuités de f est dénombrable.

Exemple 35. La fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}$ est croissante avec une infinité de points de discontinuité.

Proposition 36. Si f est une fonction monotone telle que $f(I)$ est un intervalle, elle est alors continue sur I. p. 175

Théorème 37 (Bijection)**.** Si f est une application continue et strictement monotone sur I, alors :

(i) $f(I)$ est un intervalle.
(ii) f^{-1} est continue.
(iii) f^{-1} est strictement monotone de même sens de variation que f.

Exemple 38. La fonction $\exp : x \mapsto e^x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_*^+$ qui admet donc une bijection réciproque ln qui est strictement croissante.

[D-L] p. 405

Théorème 39 (Lebesgue)**.** Une application monotone est dérivable presque partout.

III - Propriétés importantes

1. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 40 (Des valeurs intermédiaires)**.** On suppose f continue sur I. Alors $f(I)$ est un intervalle. [GOU20] p. 41

Remarque 41. Une autre manière d'écrire ce résultat est la suivante. Si $f(a) \leq f(b)$ (resp. $f(a) \geq f(b)$) avec $a < b$, alors pour tout $f(a) \leq \gamma \leq f(b)$ (resp. $f(b) \leq \gamma \leq f(a)$), il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \gamma$.

Corollaire 42. L'image d'un segment de $\mathbb{R}$ par f est un segment de $\mathbb{R}$.

2. Théorème de Rolle

Dans cette partie, I désigne un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

Théorème 43 (Rolle)**.** On suppose f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors,

$$\exists c \in]a, b[\text{ tel que } f'(c) = 0$$

Théorème 44 (Des accroissements finis)**.** On suppose f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors,

$$\exists c \in]a, b[\text{ tel que } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Corollaire 45. On suppose f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors, f est croissante si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a, b[$, avec égalité si et seulement si f est constante.

Corollaire 46. On suppose f continue sur $[a, b[$ et dérivable sur $]a, b[$ et telle que $\ell = \lim_{\substack{t \to a \\ t > a}} f'(t)$ existe. Alors, f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

Théorème 47 (Darboux)**.** On suppose f dérivable sur I. Alors $f'(I)$ est un intervalle. p. 80

3. Formules de Taylor

Dans cette partie, I désigne encore un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. p. 75

Théorème 48 (Formule de Taylor-Lagrange)**.** On suppose f de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[a, b]$ telle que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a, b[$. Alors,

$$\exists c \in]a, b[\text{ tel que } f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

Application 49.
— $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.
— $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.
— $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

4. Continuité sur un compact

Proposition 50. Une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes. p. 31

Théorème 51 (Heine)**.** Une fonction continue sur un compact y est uniformément continue.

Théorème 52 (Bernstein)**.** On suppose $I = [0, 1]$ et f continue sur $[0, 1]$. On note p. 242

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) b_n^k(x) \text{ avec } b_n^k(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

[DEV] **Théorème 53** (Weierstrass)**.** Toute fonction continue sur un compact est limite uniforme de fonctions polynômiales. p. 304

IV - Régularité des fonctions limites

1. Suites et séries de fonctions

Proposition 54. Si une suite de fonctions est continue en un point a et converge uniformément vers une fonction limite, alors celle-ci est continue en a. p. 233

Contre-exemple 55. La suite de fonctions (g_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0, 1]$ par $g_n(x) = x^n$ converge vers une fonction non continue.

Proposition 56. On suppose que I est un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que :

(i) Il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $(f_n(x_0))$ converge.

(ii) La suite (f_n') converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction g.

Alors (f_n) converge uniformément vers une fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et telle que $f' = g$.

Exemple 57. La fonction $\zeta : s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$. p. 302

2. Fonctions définies par une intégrale

Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $g : E \times X \to \mathbb{C}$ où (E,d) est un espace métrique. On pose $G : t \mapsto \int_X g(t,x)\,\mathrm{d}\mu(x)$. **[Z-Q]** p. 312

Théorème 58 (Continuité sous le signe intégral)**.** On suppose :

(i) $\forall t \in E$, $x \mapsto g(t,x)$ est mesurable.

(ii) pp. en $x \in X$, $t \mapsto g(t,x)$ est continue en $t_0 \in E$.

(iii) $\exists h \in L_1(X)$ positive telle que

$$|g(t,x)| \leq h(x) \quad \forall t \in E, \text{pp. en } x \in X$$

Alors G est continue en t_0.

Théorème 59 (Dérivation sous le signe intégral)**.** On suppose :

(i) $\forall t \in I$, $x \mapsto g(t,x) \in L_1(X)$.

(ii) pp. en $x \in X$, $t \mapsto g(t,x)$ est dérivable sur I. On notera $\frac{\partial g}{\partial t}$ cette dérivée définie presque partout.

(iii) $\forall K \subseteq I$ compact, $\exists h_K \in L_1(X)$ positive telle que

$$\left|\frac{\partial g}{\partial t}(x,t)\right| \leq h_K(x) \quad \forall t \in I, \text{pp. en } x$$

Alors $\forall t \in I$, $x \mapsto \frac{\partial g}{\partial t}(x,t) \in L_1(X)$ et G est dérivable sur I avec

$$\forall t \in I, G'(t) = \int_X \frac{\partial g}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

[G-K] p. 107

Application 60 (Intégrale de Dirichlet)**.** On pose $\forall x \geq 0$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} \, \mathrm{d}t$$

alors :

(i) F est bien définie et est continue sur $\mathbb{R}^+$.

(ii) F est dérivable sur $\mathbb{R}^+_*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^+_*$, $F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.

(iii) $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

Annexes

[GOU20] p. 73

Valeur de $f(x)$	**Valeur de** $f'(x)$
x^r $(r \in \mathbb{R})$	rx^{r-1}
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos(x)^2}$
e^x	e^x
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

FIGURE 1 – Dérivées de fonctions usuelles

Bibliographie

Leçons pour l'agrégation de mathématiques **[D-L]**

Maximilien Dreveton et Joachim Lhabouz. *Leçons pour l'agrégation de mathématiques. Préparation à l'oral.* Ellipses, 28 mai 2019.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3543-13866-lecons-pour-lagregation-de-mathematiques-preparation-a-loral-9782340030183.html.

De l'intégration aux probabilités **[G-K]**

Olivier Garet et Aline Kurtzmann. *De l'intégration aux probabilités.* 2e éd. Ellipses, 28 mai 2019.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/4593-14919-de-l-integration-aux-probabilites-2e-edition-augmentee-9782340030206.html.

Les maths en tête **[GOU20]**

Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Analyse.* 3e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html.

Formulaire de maths **[R-R]**

Olivier Rodot et Jean-Étienne Rombaldi. *Formulaire de maths. Avec résumés de cours.* De Boeck Supérieur, 30 août 2022.
https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807339880-formulaire-de-maths.

Éléments d'analyse réelle **[ROM19]**

Jean-Étienne Rombaldi. *Éléments d'analyse réelle.* 2e éd. EDP Sciences, 6 juin 2019.
https://laboutique.edpsciences.fr/produit/1082/9782759823789/elements-d-analyse-reelle.

Petit guide de calcul différentiel **[ROU]**

François Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel. à l'usage de la licence et de l'agrégation.* 4e éd. Cassini, 27 fév. 2015.
https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/94-petit-guide-de-calcul-differentiel-4e-ed.html.

Analyse pour l'agrégation **[Z-Q]**

Claude Zuily et Hervé Queffélec. *Analyse pour l'agrégation. Agrégation/Master Mathématiques.* 5e éd. Dunod, 26 août 2020.
https://www.dunod.com/prepas-concours/analyse-pour-agregation-agregationmaster-mathematiques.