

228 Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Soient I un intervalle de \mathbb{R} non réduit à un point et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

I - Continuité et dérivabilité

1. Continuité

Définition 1. — f est **continue au point** $a \in I$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - a| < \eta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

— f est **continue sur** I si f est continue en tout point de I .

[ROM19-1]
p. 163

Exemple 2. Pour tout entier n , $x \mapsto x^n$ est continue sur \mathbb{R} .

Théorème 3 (Caractérisations séquentielle et topologique de la continuité). (i) f est continue en $a \in I$ si et seulement si toute suite de points de I qui converge vers a est transformée par f en une suite convergente vers $f(a)$.

(ii) f est continue en $a \in I$ si et seulement si l'image réciproque par f de tout ouvert (resp. fermé) de \mathbb{R} est un ouvert (resp. fermé) de I .

Exemple 4. La fonction $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ définie sur \mathbb{R}_* n'est pas continue en 0.

Proposition 5. Si f et g sont deux fonctions définies sur I à valeurs réelles et continues en $a \in I$, alors $|f|$, $f + g$, fg , $\min(f, g)$ et $\max(f, g)$ sont continues en a .

2. Uniforme continuité

Définition 6. f est **uniformément continue sur** I si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in I, |x - y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

[GOU20]
p. 12

Remarque 7. En particulier, une fonction uniformément continue sur un intervalle est continue sur ce même intervalle.

Exemple 8. Une fonction lipschitzienne sur I est uniformément continue sur I .

Contre-exemple 9. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $]0, 1]$ est continue mais n'est pas uniformément continue.

Proposition 10. On se place dans le cas où $I = \mathbb{R}^+$ et on suppose f uniformément continue sur \mathbb{R}^+ . Alors,

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}_*^+ \text{ tels que } \forall x \in \mathbb{R}^+, |f(x)| \leq \alpha x + \beta$$

p. 18

Théorème 11 (Prolongement des applications uniformément continues). Soit $J \subseteq I$ dense dans I et soit $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue sur J . Alors,

$$\exists ! h : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ uniformément continue et telle que } h|_J = g$$

p. 24

3. Dérivabilité

Définition 12. On dit que f est **dérivable en** $a \in I$ si

$$\lim_{\substack{t \rightarrow a \\ t \neq a}} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

existe. Lorsque cette limite existe, elle est notée $f'(a)$.

p. 71

Remarque 13. — De même, f est **dérivable à gauche (resp. à droite) en** $a \in I$ si $\lim_{\substack{t \rightarrow a \\ t < a \\ t \in I}} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$ existe (resp. $\lim_{\substack{t \rightarrow a \\ t > a \\ t \in I}} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$ existe). On la note alors $f'_g(a)$ (resp. $f'_d(a)$).

— f est dérivable en $a \in I$ si et seulement si f est dérivable à gauche, à droite et $f'_g(a) = f'_d(a)$.

— f est dérivable en $a \in I$ si et seulement si, quand x tend vers a ,

$$\exists \ell \in \mathbb{R}, f(x) = f(a) + (x - a)\ell + o(x - a)$$

Proposition 14. Si f est dérivable en $a \in I$, alors f est continue en a .

Contre-exemple 15. On note Δ la fonction définie sur \mathbb{R} 1-périodique et telle que la restriction à $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ vérifie $\Delta(x) = |x|$. Alors,

$$f : x \mapsto \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p} \Delta(2^p x)$$

p. 86

est bien définie, continue sur \mathbb{R} , mais dérivable en aucun point de \mathbb{R} .

Remarque 16. La fonction dérivée $f' : x \mapsto f'(x)$ n'est pas forcément continue là où elle est définie.

p. 72

Exemple 17. La fonction $x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ définie sur \mathbb{R} est dérivable, de dérivée $x \mapsto \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ définie sur \mathbb{R} mais non continue en 0.

Proposition 18. Si f et g sont deux fonctions définies sur I à valeurs réelles et dérivables en $a \in I$. Alors :

- (i) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$.
- (ii) $f g$ est dérivable en a et $(f g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
- (iii) Si $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

Définition 19. On dit que f est **de classe \mathcal{C}^n sur I** si $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f^{(k)}$ (la dérivée k -ième de f) existe et continue.

Proposition 20 (Formule de Leibniz). Soit $a \in I$. Si f et g sont deux fonctions définies sur I à valeurs réelles et qui admettent une dérivée n -ième en a ,

$$(f g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a)$$

Proposition 21. Soit J un intervalle de \mathbb{R} . Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow I$ sont deux fonctions, alors, en supposant f dérivable en a et g dérivable en $f(a)$, $(f \circ g)$ est dérivable en a et,

$$(f \circ g)'(a) = g'(a)(f' \circ g)(a)$$

Corollaire 22. Soient J un intervalle de \mathbb{R} et $h : I \rightarrow J$ une bijection dérivable en $a \in I$. Alors, h^{-1} est dérivable en $b = h(a)$ si et seulement si $h'(a) \neq 0$, et on a,

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Corollaire 23. La composée de deux applications de classe \mathcal{C}^n est de classe \mathcal{C}^n .

II - Fonctions particulières qui sont dérivables ou continues

1. Fonctions convexes

Définition 24. f est convexe si

$$\forall x, y \in I, \forall t \in [0, 1], f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

[ROM19-1]
p. 225

Exemple 25. — $x \mapsto |x|$ est convexe sur \mathbb{R} .

— \exp est convexe sur \mathbb{R} .

Proposition 26. Si f est convexe, elle possède en tout point de $\overset{\circ}{I}$ une dérivée à droite et une dérivée à gauche. Elle est donc continue sur $\overset{\circ}{I}$. De plus les applications dérivées à gauche f'_g et à droite f'_d sont croissantes avec $f'_g(x) \leq f'_d(x)$ pour tout $x \in \overset{\circ}{I}$.

[GOU20]
p. 96

Proposition 27. On suppose f deux fois dérivable. Alors, f est convexe si et seulement si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.

Application 28 (Méthode de Newton). Soit $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 strictement croissante sur $[c, d]$. On considère la fonction

$$\varphi : \begin{array}{l} [c, d] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x - \frac{g(x)}{g'(x)} \end{array}$$

(qui est bien définie car $g' > 0$). Alors :

- (i) $\exists! a \in [c, d]$ tel que $g(a) = 0$.
- (ii) $\exists \alpha > 0$ tel que $I = [a - \alpha, a + \alpha]$ est stable par φ .
- (iii) La suite (x_n) des itérés (définie par récurrence par $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ pour tout $n \geq 0$) converge quadratiquement vers a pour tout $x_0 \in I$.

[ROU]
p. 152

Corollaire 29. En reprenant les hypothèses et notations du théorème précédent, et en supposant de plus g strictement convexe sur $[c, d]$, le résultat du théorème est vrai sur $I = [a, d]$. De plus :

- (i) (x_n) est strictement décroissante (ou constante).
- (ii) $x_{n+1} - a \sim \frac{g''(a)}{g'(a)}(x_n - a)^2$ pour $x_0 > a$.

[DEV]

Exemple 30. — On fixe $y > 0$. En itérant la fonction $F : x \mapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{y}{x} \right)$ pour un nombre de départ compris entre c et d où $0 < c < d$ et $c^2 < 0 < d^2$, on peut obtenir une approximation du nombre \sqrt{y} .

— En itérant la fonction $F : x \mapsto \frac{x^2+1}{2x-1}$ pour un nombre de départ supérieur à 2, on peut obtenir une approximation du nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. Fonction monotones

Définition 31. — On dit que f est **croissante** si $\forall x, y \in I, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$.

— On dit que f est **décroissante** si $\forall x, y \in I, x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$.

— On dit que f est **monotone** si f est croissante ou décroissante.

[R-R]
p. 31

Définition 32. Si $a \in \mathring{I}$, et si f est discontinue en a avec des limites à gauche et à droite en ce point, on dit que f a une **discontinuité de première espèce** en a .

[ROM19-1]
p. 163

Proposition 33. Une fonction monotone de I dans \mathbb{R} ne peut avoir que des discontinuités de première espèce.

Théorème 34. On suppose que I est un intervalle ouvert. Si f est une fonction monotone, alors l'ensemble des points de discontinuités de f est dénombrable.

Exemple 35. La fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}$ est croissante avec une infinité de points de discontinuité.

Proposition 36. Si f est une fonction monotone telle que $f(I)$ est un intervalle, elle est alors continue sur I .

p. 175

Théorème 37 (Bijection). Si f est une application continue et strictement monotone sur I , alors :

(i) $f(I)$ est un intervalle.

(ii) f^{-1} est continue.

(iii) f^{-1} est strictement monotone de même sens de variation que f .

Exemple 38. La fonction $\exp : x \mapsto e^x$ est une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R}_*^+ qui admet donc une bijection réciproque \ln qui est strictement croissante.

[D-L]
p. 405

Théorème 39 (Lebesgue). Une application monotone est dérivable presque partout.

III - Propriétés importantes

1. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 40 (Des valeurs intermédiaires). On suppose f continue sur I . Alors $f(I)$ est un intervalle.

[GOU20]
p. 41

Remarque 41. Une autre manière d'écrire ce résultat est la suivante. Si $f(a) \leq f(b)$ (resp. $f(a) \geq f(b)$) avec $a < b$, alors pour tout $f(a) \leq \gamma \leq f(b)$ (resp. $f(b) \leq \gamma \leq f(a)$), il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \gamma$.

Corollaire 42. L'image d'un segment de \mathbb{R} par f est un segment de \mathbb{R} .

2. Théorème de Rolle

Dans cette partie, I désigne un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} non réduit à un point.

Théorème 43 (Rolle). On suppose f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors,

$$\exists c \in]a, b[\text{ tel que } f'(c) = 0$$

Théorème 44 (Des accroissements finis). On suppose f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors,

$$\exists c \in]a, b[\text{ tel que } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Corollaire 45. On suppose f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors, f est croissante si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a, b[$, avec égalité si et seulement si f est constante.

Corollaire 46. On suppose f continue sur $[a, b[$ et dérivable sur $]a, b[$ et telle que $\ell = \lim_{t \rightarrow a} f'(t)$ existe. Alors, f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

Théorème 47 (Darboux). On suppose f dérivable sur I . Alors $f'(I)$ est un intervalle.

p. 80

3. Formules de Taylor

Dans cette partie, I désigne encore un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} non réduit à un point.

p. 75

Théorème 48 (Formule de Taylor-Lagrange). On suppose f de classe \mathcal{C}^n sur $[a, b]$ telle que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a, b[$. Alors,

$$\exists c \in]a, b[\text{ tel que } f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

Application 49. — $\forall x \in \mathbb{R}^+, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

— $\forall x \in \mathbb{R}^+, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

— $\forall x \in \mathbb{R}, 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

4. Continuité sur un compact

Proposition 50. Une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.

p. 31

Théorème 51 (Heine). Une fonction continue sur un compact y est uniformément continue.

Théorème 52 (Bernstein). On suppose $I = [0, 1]$ et f continue sur $[0, 1]$. On note

p. 242

$$B_n(f) : x \mapsto \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Alors,

$$\|B_n(f) - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Théorème 53 (Weierstrass). Toute fonction continue sur un compact est limite uniforme de fonctions polynômiales.

p. 304

IV - Régularité des fonctions limites

1. Suites et séries de fonctions

Proposition 54. Si une suite de fonctions est continue en un point a et converge uniformément vers une fonction limite, alors celle-ci est continue en a .

p. 233

[DEV]

Contre-exemple 55. La suite de fonctions (g_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0, 1]$ par $g_n(x) = x^n$ converge vers une fonction non continue.

Proposition 56. On suppose que I est un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} non réduit à un point. Soit (f_n) une suite de fonctions de I dans \mathbb{R} . On suppose que :

- (i) Il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $(f_n(x_0))$ converge.
- (ii) La suite (f'_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction g .

Alors (f_n) converge uniformément vers une fonction f de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ et telle que $f' = g$.

Exemple 57. La fonction $\zeta : s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ est \mathcal{C}^∞ sur $]1, +\infty[$.

p. 302

2. Fonctions définies par une intégrale

Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $g : E \times X \rightarrow \mathbb{C}$ où (E, d) est un espace métrique. On pose $G : t \mapsto \int_X g(t, x) d\mu(x)$.

[Z-Q]
p. 312

Théorème 58 (Continuité sous le signe intégral). On suppose :

- (i) $\forall t \in E, x \mapsto g(t, x)$ est mesurable.
- (ii) pp. en $x \in X, t \mapsto g(t, x)$ est continue en $t_0 \in E$.
- (iii) $\exists h \in L_1(X)$ positive telle que

$$|g(t, x)| \leq h(x) \quad \forall t \in E, \text{ pp. en } x \in X$$

Alors G est continue en t_0 .

Théorème 59 (Dérivation sous le signe intégral). On suppose :

- (i) $\forall t \in I, x \mapsto g(t, x) \in L_1(X)$.
- (ii) pp. en $x \in X, t \mapsto g(t, x)$ est dérivable sur I . On notera $\frac{\partial g}{\partial t}$ cette dérivée définie presque partout.
- (iii) $\forall K \subseteq I$ compact, $\exists h_K \in L_1(X)$ positive telle que

$$\left| \frac{\partial g}{\partial t}(x, t) \right| \leq h_K(x) \quad \forall t \in I, \text{ pp. en } x$$

Alors $\forall t \in I, x \mapsto \frac{\partial g}{\partial t}(x, t) \in L_1(X)$ et G est dérivable sur I avec

$$\forall t \in I, G'(t) = \int_X \frac{\partial g}{\partial t}(x, t) d\mu(x)$$

[G-K]
p. 107

Application 60 (Intégrale de Dirichlet). On pose $\forall x \geq 0$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt$$

alors :

- (i) F est bien définie et est continue sur \mathbb{R}^+ .
- (ii) F est dérivable sur \mathbb{R}_*^+ et $\forall x \in \mathbb{R}_*^+$, $F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.
- (iii) $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

Annexes

[GOU20]
p. 73

Valeur de $f(x)$	Valeur de $f'(x)$
$x^r (r \in \mathbb{R})$	rx^{r-1}
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos(x)^2}$
e^x	e^x
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

FIGURE 1 – Dérivées de fonctions usuelles

Bibliographie

Leçons pour l'agrégation de mathématiques

[D-L]

Maximilien DREVEYTON et Joachim LHABOUZ. *Leçons pour l'agrégation de mathématiques. Préparation à l'oral*. Ellipses, 28 mai 2019.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3543-13866-lecons-pour-lagregation-de-mathematiques-preparation-a-loral-9782340030183.html>.

De l'intégration aux probabilités

[G-K]

Olivier GARET et Aline KURTZMANN. *De l'intégration aux probabilités*. 2^e éd. Ellipses, 28 mai 2019.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/4593-14919-de-l-integration-aux-probabilites-2e-edition-augmentee-9782340030206.html>.

Les maths en tête

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3^e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.

Formulaire de maths

[R-R]

Olivier RODOT et Jean-Étienne ROMBALDI. *Formulaire de maths. Avec résumés de cours*. De Boeck Supérieur, 30 août 2022.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807339880-formulaire-de-maths>.

Éléments d'analyse réelle

[ROM19-1]

Jean-Étienne ROMBALDI. *Éléments d'analyse réelle*. 2^e éd. EDP Sciences, 6 juin 2019.

<https://laboutique.edpsciences.fr/produit/1082/9782759823789/elements-d-analyse-reelle>.

Petit guide de calcul différentiel

[ROU]

François ROUVIÈRE. *Petit guide de calcul différentiel. à l'usage de la licence et de l'agrégation*. 4^e éd. Cassini, 27 fév. 2015.

<https://store.cassini.fr/fr/enseignement-des-mathematiques/94-petit-guide-de-calcul-differentiel-4e-ed.html>.

Analyse pour l'agrégation

[Z-Q]

Claude ZUILY et Hervé QUEFFÉLEC. *Analyse pour l'agrégation. Agrégation/Master Mathématiques*. 5^e éd. Dunod, 26 août 2020.

<https://www.dunod.com/prepas-concours/analyse-pour-agregation-agregationmaster-mathematiques>.