235 Problèmes d'interversion de symboles en analyse.

I - Suites et séries de fonctions

1. Utilisation de la convergence uniforme

[AMR11] p. 146

Théorème 1 (de la double limite)**.** Soient X une partie non vide d'un espace vectoriel normé de dimension finie, E un espace de Banach, (f_n) une suite de fonctions de X dans E et $a \in \overline{X}$. On suppose :

(i) (f_n) converge uniformément sur X.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ admet une limite quand x tend vers a.

Alors,

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right) = \lim_{x \to a} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right)$$

Théorème 2. Soient X une partie non vide d'un espace vectoriel normé de dimension finie, E un espace de Banach, (f_n) une suite de fonctions de X dans E et $a \in X$. On suppose :

(i) (f_n) converge uniformément sur X vers f.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ est continue en a.

Alors f est continue en a.

Exemple 3. La suite (f_n) définie sur $\mathbb{R}^+$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f_n : x \mapsto e^{-nx}$ converge vers

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Les fonctions f_n sont continues, mais f ne l'est pas : on n'a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

Théorème 4. Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, E un espace vectoriel normé et (f_n) une suite de fonctions de I dans E. On suppose :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est dérivable sur I.

(ii) (f_n) converge simplement sur I vers f.

(iii) (f'_n) converge uniformément sur I.

Alors f est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $f'(x) = \lim_{n \to +\infty} f'_n(x)$.

Contre-exemple 5. La suite (f_n) définie sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f_n : x \longmapsto \left(x^2 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ converge vers $x \longmapsto |x|$, qui n'est pas dérivable à l'origine bien que les f_n le soient.

Théorème 6. Soient $I = [a, b]$ un segment non vide de $\mathbb{R}$, E un espace de Banach et (f_n) une suite de fonctions de I dans E. On suppose :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

(ii) Il existe $x_0 \in I$ tel que $(f_n(x_0))$ converge.

(iii) (f_n') converge uniformément sur I vers g.

Alors (f_n) converge uniformément sur I vers f de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $f' = g$.

2. Séries de fonctions et limites

Théorème 7. Soient X une partie non vide d'un espace vectoriel normé, E un espace de Banach, $\sum f_n$ une série de fonctions de X dans E et $a \in \overline{X}$. On suppose : p. 195

(i) $\sum f_n$ converge uniformément sur X.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ admet une limite ℓ_n quand x tend vers a.

Alors, $\sum \ell_n$ converge dans E et,

$$\lim_{x \to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \to a} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$$

Théorème 8. Soient X une partie non vide d'un espace vectoriel normé, E un espace de Banach, $\sum f_n$ une série de fonctions de X dans E et $a \in X$. On suppose :

(i) $\sum f_n$ converge uniformément sur X.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a.

Alors, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue en a.

Exemple 9. La fonction $x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-n|x|}}{n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème 10. Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, E un espace de Banach et $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans E. On suppose :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est dérivable sur I.

(ii) Il existe $x_0 \in I$ tel que $\sum f_n(x_0)$ converge.

(iii) $\sum f_n'$ converge uniformément sur I.

Alors $\sum f_n$ converge simplement sur I uniformément sur tout compact de I, et,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$$

Exemple 11. La fonction $\zeta : s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall s \in]1,+\infty[, \zeta^{(k)}(s) = (-1)^k \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln(s))^k}{n^s}$$

3. Le cas des séries entières

Définition 12. On appelle **série entière** toute série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$ où z est une variable complexe et où (a_n) est une suite complexe. [GOU20] p. 247

Lemme 13 (Abel)**.** Soient $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ tels que $(a_n z_0^n)$ soit bornée. Alors :

(i) $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, $\sum a_n z^n$ converge absolument.

(ii) $\forall r \in]0, z_0[$, $\sum a_n z^n$ converge normalement dans $\overline{D}(0,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$.

Définition 14. En reprenant les notations précédentes, le nombre

$$R = \sup\{r \geq 0 \mid (|a_n| r^n) \text{ est bornée}\}$$

est le **rayon de convergence** de $\sum a_n z^n$.

Exemple 15. — $\sum n^2 z^n$ a un rayon de convergence égal à 1. p. 255

— $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini. On note $z \mapsto e^z$ la fonction somme.

Proposition 16. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $r \neq 0$. Alors $S \in \mathscr{H}(D(0,r))$ et, [QUE] p. 57

$$S'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$$

pour tout $z \in D(0,r)$.

Plus précisément, pour tout $k \in \mathbb{N}$, S est k fois dérivable avec

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n z^{n-k}$$

[DEV] [GOU20] p. 263

Théorème 17 (Abel angulaire)**.** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 tel que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série sur le disque unité D de $\mathbb{C}$. On fixe $\theta_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et on pose $\Delta_{\theta_0} = \{z \in D \mid \exists \rho > 0 \text{ et } \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0] \text{ tels que } z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$.

Alors $\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Application 18.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} = \frac{\pi}{4}$$

Application 19.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$$

Contre-exemple 20. La réciproque est fausse :

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ |z|<1}} (-1)^n z^n = \lim_{\substack{z \to 1 \\ |z|<1}} \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}$$

Théorème 21 (Taubérien faible)**.** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On note f la somme de cette série sur $D(0,1)$. On suppose que

$$\exists S \in \mathbb{C} \text{ tel que } \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = S$$

Si $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $\sum a_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

Remarque 22. Ce dernier résultat est une réciproque partielle du Théorème 17. Il reste vrai en supposant $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ (c'est le théorème Taubérien fort).

II - Limites et intégration

On se place dans un espace mesuré $(X, \mathscr{A}, \mu)$.

1. Intégrale d'une suite de fonctions

Théorème 23 (Convergence monotone)**.** Soit (f_n) une suite croissante de fonctions mesu- **[B-P]** p. 124

rables positives. Alors, la limite f de cette suite est mesurable positive, et,

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu$$

Application 24. Soient f, g deux fonctions mesurables positives.

(i) $f \leq g \implies \int_X f \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X g \,\mathrm{d}\mu$ (l'intégrale est croissante).

(ii) $\int_X (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu + \int_X g \,\mathrm{d}\mu$ (l'intégrale est additive).

(iii) $\forall \lambda \geq 0$, $\int_X \lambda f \,\mathrm{d}\mu = \lambda \int_X f \,\mathrm{d}\mu$ (l'intégrale est positivement homogène).

(iv) Si $f = g$ pp., alors $\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_X g \,\mathrm{d}\mu$.

Théorème 25 (Lemme de Fatou)**.** Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives. Alors, p. 137

$$0 \leq \int_X \liminf f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \leq +\infty$$

Exemple 26. Soit f croissante sur $[0,1]$, continue en 0 et dérivable en 1 et dérivable pp. dans $[0,1]$. Alors,

$$\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x \leq f(1) - f(0)$$

Théorème 27 (Convergence dominée)**.** Soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathscr{L}_1$ telle que :

(i) pp. en x, $(f_n(x))$ converge dans $\mathbb{K}$ vers $f(x)$.

(ii) $\exists g \in \mathscr{L}_1$ positive telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ pp. en } x, |f_n(x)| \leq g(x)$$

Alors,

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0$$

Exemple 28.
— On reprend l'Exemple 26 et on suppose f partout dérivable sur $[0,1]$ de dérivée bornée. Alors l'inégalité est une égalité.
— Soit $\alpha > 1$. On pose $\forall n \geq 1$, $I_n(\alpha) = \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x$. Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{(1-\alpha)x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha - 1}$$

[AMR11]
p. 156

Exemple 29.

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{x^n}{x^{2n}+1}\,\mathrm{d}x=0$$

Application 30 (Lemme de Borel-Cantelli)**.** Soit (A_n) une famille de parties de $\mathscr{A}$. Alors, [B-P] p. 144

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\mu(A_n)<+\infty \implies \mu\left(\limsup_{n\to+\infty}A_n\right)=0$$

2. Intégrale à paramètre

Soit $f : E\times X\to\mathbb{C}$ où (E,d) est un espace métrique. On pose $F : t\mapsto\int_X f(t,x)\,\mathrm{d}\mu(x)$. [Z-Q] p. 312

a. Continuité

Théorème 31 (Continuité sous le signe intégral)**.** On suppose :

(i) $\forall t\in E$, $x\mapsto f(t,x)$ est mesurable.

(ii) pp. en $x\in X$, $t\mapsto f(t,x)$ est continue en $t_0\in E$.

(iii) $\exists g\in L_1(X)$ positive telle que

$$|f(t,x)|\leq g(x)\quad\forall t\in E, \text{pp. en } x\in X$$

Alors F est continue en t_0.

Corollaire 32. On suppose :

(i) $\forall t\in E$, $x\mapsto f(t,x)$ est mesurable.

(ii) pp. en $x\in X$, $t\mapsto f(t,x)$ est continue sur E.

(iii) $\forall K\subseteq E$, $\exists g_K\in L_1(X)$ positive telle que

$$|f(t,x)|\leq g_K(x)\quad\forall t\in E, \text{pp. en } x$$

Alors F est continue sur E.

Exemple 33. La fonction p. 318

$$\Gamma : \begin{array}{ccc}\mathbb{R}_*^+ & \to & \mathbb{R}_*^+\\ t & \mapsto & \int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\end{array}$$

est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_*^+$.

[G-K] p. 104

Exemple 34. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ intégrable. Alors,

$$\lambda \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t)\,\mathrm{d}t$$

est bien définie et est continue sur $\mathbb{R}^+$.

b. Dérivabilité

On suppose ici que E est un intervalle I ouvert de $\mathbb{R}$. [Z-Q] p. 313

Théorème 35 (Dérivation sous le signe intégral)**.** On suppose :

(i) $\forall t \in I$, $x \mapsto f(t,x) \in L_1(X)$.

(ii) pp. en $x \in X$, $t \mapsto f(t,x)$ est dérivable sur I. On notera $\frac{\partial f}{\partial t}$ cette dérivée définie presque partout.

(iii) $\forall K \subseteq I$ compact, $\exists g_K \in L_1(X)$ positive telle que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g_K(x) \quad \forall t \in I, \text{pp. en } x$$

Alors $\forall t \in I$, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \in L_1(X)$ et F est dérivable sur I avec

$$\forall t \in I, F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

Remarque 36. — Si dans le Théorème 35, hypothèse (i), on remplace "dérivable" par "$\mathscr{C}^1$", alors la fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$.

— On a un résultat analogue pour les dérivées d'ordre supérieur.

Théorème 37 (k-ième dérivée sous le signe intégral)**.** On suppose :

(i) $\forall t \in I$, $x \mapsto f(t,x) \in L_1(X)$.

(ii) pp. en $x \in X$, $t \mapsto f(t,x) \in \mathscr{C}^k(I)$. On notera $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j f$ la j-ième dérivée définie presque partout pour $j \in [\![0,k]\!]$.

(iii) $\forall j \in [\![0,k]\!]$, $\forall K \subseteq I$ compact, $\exists g_{j,K} \in L_1(X)$ positive telle que

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j f(x,t)\right| \leq g_{j,K}(x) \quad \forall t \in K, \text{pp. en } x$$

Alors $\forall j \in [\![0,k]\!]$, $\forall t \in I$, $x \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j f(x,t) \in L_1(X)$ et $F \in \mathscr{C}^k(I)$ avec

$$\forall j \in [\![0,k]\!], \forall t \in I, F^{(j)}(t) = \int_X \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j f(x,t)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

p. 318

Exemple 38. La fonction Γ de l'Exemple 33 est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+_*$.

Exemple 39. On se place dans l'espace mesuré $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \mathrm{card})$ et on considère (f_n) une suite de fonctions dérivables sur I telle que [B-P] p. 149

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| + \sup_{x \in I} |f_n'(t)| < +\infty$$

Alors $x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ est dérivable sur I de dérivée $x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n'(x)$.

Application 40 (Transformée de Fourier d'une Gaussienne)**.** En résolvant une équation différentielle linéaire, on a [GOU20] p. 169

$$\forall \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha t^2} e^{-itx} \,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{x^2}{\pi \alpha}}$$

[DEV] **Application 41** (Intégrale de Dirichlet)**.** On pose $\forall x \geq 0$, [G-K] p. 107

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} \,\mathrm{d}t$$

alors :

(i) F est bien définie et est continue sur $\mathbb{R}^+$.

(ii) F est dérivable sur $\mathbb{R}^+_*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^+_*$, $F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.

(iii) $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

c. Holomorphie

On suppose ici que E est un ouvert Ω de $\mathbb{C}$.

[Z-Q] p. 314

Théorème 42 (Holomorphie sous le signe intégral)**.** On suppose :

(i) $\forall z \in \Omega$, $x \mapsto f(z,x) \in L_1(X)$.

(ii) pp. en $x \in X$, $z \mapsto f(z,x)$ est holomorphe dans Ω. On notera $\frac{\partial f}{\partial z}$ cette dérivée définie presque partout.

(iii) $\forall K \subseteq \Omega$ compact, $\exists g_K \in L_1(X)$ positive telle que

$$|f(x,z)| \leq g_K(x) \quad \forall z \in K, \text{pp. en } x$$

Alors F est holomorphe dans Ω avec

$$\forall z \in \Omega, F'(z) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(z,t) \,\mathrm{d}\mu(z)$$

p. 318

Exemple 43. La fonction Γ de l'Exemple 33 est holomorphe dans l'ouvert $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

3. Intégrale sur un espace produit

Théorème 44 (Fubini-Tonelli)**.** Soient $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ un autre espace mesuré et $f : (X \times Y) \to \overline{\mathbb{R}^+}$. On suppose μ et ν σ-finies. Alors : [B-P] p. 237

(i) $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ et $y \mapsto \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$ sont mesurables.

(ii) Dans $\overline{\mathbb{R}^+}$,

$$\int_{X\times Y} f\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)$$

Théorème 45 (Fubini-Lebesgue)**.** Soient $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ un autre espace mesuré et $f \in \mathscr{L}_1(\mu\otimes\nu)$. Alors :

(i) $x \mapsto f(x,y)$ et $y \mapsto f(x,y)$ sont intégrables.

(ii) $x \mapsto \int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$ et $y \mapsto \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$ sont intégrables, les fonctions étant définies pp.

(iii) On a :

$$\int_{X\times Y} f\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\right) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)$$

Contre-exemple 46. On considère $f : (x,y) \mapsto 2e^{-2xy} - e^{-xy}$. Alors, $\int_{[0,1]} \left(\int_{\mathbb{R}^+} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = 0$, mais $\int_{\mathbb{R}^+} \left(\int_{[0,1]} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \ln(2)$.

Exemple 47. Soient $f : (x,y) \mapsto xy$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y \geq 0 \text{ et } x+y \leq 1\}$. Alors, [GOU20] p. 359

$$\int\int_D = f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 x\frac{(1-x)^2}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{24}$$

III - Applications en analyse de Fourier

1. Séries de Fourier

Définition 48. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On appelle **coefficients de Fourier** de f les nombres complexes définis par p. 267

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t$$

La **série de Fourier** associée à f est

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$$

Théorème 49 (Parseval)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors la série de Fourier de f est convergente et,

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Exemple 50. Avec $f : x \mapsto 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$, on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Théorème 51 (Jordan-Dirichlet)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application 2π-périodique et $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors la série de Fourier de f est convergente en tout point $x \in \mathbb{R}$ et sa somme en ce point vaut

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$$

Exemple 52. Toujours avec $f : x \mapsto 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$, on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2. Transformée de Fourier

[AMR08] p. 109

Définition 53. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable. On définit, lorsque cela a un sens, sa **transformée de Fourier**, notée $\widehat{f}$ par

$$\widehat{f} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{C} \\ \xi & \mapsto & \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle x,\xi\rangle}\,\mathrm{d}x \end{array}$$

Exemple 54 (Densité de Poisson)**.** On pose $\forall x \in \mathbb{R}$, $p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Alors $p \in L_1(\mathbb{R})$ et, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{p}(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}$.

Lemme 55 (Riemann-Lebesgue)**.** Soit $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$, $\widehat{f}$ existe et

$$\lim_{\|\xi\|\to+\infty} \widehat{f}(\xi)$$

Théorème 56. $\forall f \in L_1(\mathbb{R}^d)$, $\widehat{f}$ est continue, bornée par $\|f\|_1$. Donc la **transformation de Fourier**

$$\mathscr{F} : \begin{array}{ccc} L_1(\mathbb{R}^d) & \rightarrow & \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d) \\ f & \mapsto & \widehat{f} \end{array}$$

est bien définie.

Corollaire 57. La transformation de Fourier $\mathscr{F} : L_1(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d)$ est une application linéaire continue.

Exemple 58.

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \widehat{\mathbb{1}_{[-1,1]}}(\xi) = \begin{cases} \frac{2\sin(\xi)}{\xi} \text{ si } \xi \neq 0 \\ 2 \text{ sinon} \end{cases}$$

Remarquons ici que la transformée de Fourier n'est pas intégrable.

Théorème 59 (Formule de dualité)**.**

$$\forall f, g \in L_1(\mathbb{R}^d),\ \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\widehat{g}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Corollaire 60. La transformation de Fourier $\mathscr{F} : L_1(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d)$ est une application injective.

Théorème 61 (Formule d'inversion de Fourier)**.** Si $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ est telle que $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\widehat{\widehat{f}}(x) = (2\pi)^d f(x) \text{ pp. en } x \in \mathbb{R}^d$$

Théorème 62 (Formule sommatoire de Poisson)**.** Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $f'(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ quand $|x| \longrightarrow +\infty$. Alors : [GOU20] p. 284

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2\pi n) e^{2i\pi n x}$$

Application 63 (Identité de Jacobi)**.**

$$\forall s > 0,\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{s}}$$