236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

I - Méthodes de base pour les fonction d'une variable

1. Primitives

Théorème 1 (Fondamental de l'analyse)**.** Soit $f : [a, b] \to E$ (où $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ est un segment et E un espace de Banach sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). [GOU20] p. 127

(i) L'application

$$F : \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & E \\ x & \mapsto & \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

est $\mathscr{C}^1$ par morceaux, continue, dérivable à gauche et à droite sur $[a, b]$ telle que

$$F'_g(x) = \lim_{\substack{t \to x \\ t < x}} f'(t) \text{ et } F'_d(x) = \lim_{\substack{t \to x \\ t > x}} f'(t)$$

(ii) Si f est continue sur $[a, b]$, F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$ avec $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

Corollaire 2. Soit $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un segment. Toute application continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ admet au moins une primitive, et pour toute primitive F de f sur $[a, b]$, on a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemple 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^n\,\mathrm{d}x$. Alors, $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$.

Proposition 4. Soit $F \in \mathbb{R}(X)$. Pour intégrer $x \mapsto F(x)$, on fait une décomposition en éléments simples de F, qui nous ramène à calculer des primitives de la forme p. 137

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^h} \text{ et } \int \frac{ax+b}{(x^2+cx+d)^h}\,\mathrm{d}x$$

où $h \in \mathbb{N}^*$ et $c - 4d < 0$.

Exemple 5.

$$\int^x \frac{1-x}{(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{x+1}{x^2+x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

2. Changement de variable

Théorème 6 (Changement de variable)**.** Soit $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ un segment. Soit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ et $f : I \to E$ où I est un intervalle tel que $\varphi([a,b]) \subseteq I$. Alors, p. 127

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,\mathrm{d}u$$

Exemple 7. p. 178

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi\ln(2)}{2}$$

Proposition 8 (Règle de Bioche)**.** Soit $R \in \mathbb{R}(X,Y)$. Pour calculer une primitive d'une fonction de la forme $f : x \mapsto R(\sin(x),\cos(x))$, on peut utiliser la règle de Bioche : p. 139

(i) Si $f(x)\,\mathrm{d}x$ reste inchangé en changeant x en $\pi - x$, on pose $t = \sin(x)$.

(ii) Si $f(x)\,\mathrm{d}x$ reste inchangé en changeant x en $-x$, on pose $t = \cos(x)$.

(iii) Si $f(x)\,\mathrm{d}x$ reste inchangé en changeant x en $\pi + x$, on pose $t = \tan(x)$.

Exemple 9.

$$\int^u \frac{\sin(x)^3}{1+\cos(x)^2}\,\mathrm{d}x \overset{t=\cos(x)}{=} \int^{\cos(u)} \frac{1-t^2}{1+t^2}(-\mathrm{d}t) = \cos(u) - 2\arctan(\cos(u)) + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

3. Intégration par parties

Théorème 10 (Intégration par parties)**.** Soit $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ un segment. Soient $u, v : [a,b] \to \mathbb{C}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Alors, p. 127

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

p. 162

Exemple 11 (Fonction Γ d'Euler)**.** On pose

$$\forall x > 0, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \, \mathrm{d}t$$

Alors,

$$\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

et en particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n) = n!$.

Exemple 12 (Intégrales de Wallis)**.** En reprenant l'Exemple 3, on a p. 130

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, W_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 1}{2p(2p-2)\dots 2} \frac{\pi}{2} \text{ et } W_{2p+1} = \frac{2p(2p-2)\dots 2}{(2p-1)(2p-3)\dots 1}$$

Application 13 (Intégrale de Gauss)**.** p. 167

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

II - Méthodes pour les fonctions de plusieurs variables

1. Intégration sur un espace produit

Théorème 14 (Fubini-Tonelli)**.** Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ et $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ deux espaces mesurés et $f : (X \times Y) \to \overline{\mathbb{R}^+}$. On suppose μ et ν σ-finies. Alors : [B-P] p. 237

(i) $x \mapsto \int_Y f(x,y) \, \mathrm{d}\nu(y)$ et $y \mapsto \int_X f(x,y) \, \mathrm{d}\mu(x)$ sont mesurables.

(ii) Dans $\overline{\mathbb{R}^+}$,

$$\int_{X \times Y} f \, \mathrm{d}(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y) \, \mathrm{d}\nu(y) \right) = \int_Y \left(\int_X f(x,y) \, \mathrm{d}\mu(x) \right)$$

Théorème 15 (Fubini-Lebesgue)**.** Soient $(X, \mathscr{A}, \mu)$ et $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ deux espaces mesurés et $f \in \mathscr{L}_1(\mu \otimes \nu)$. Alors :

(i) $x \mapsto f(x,y)$ et $y \mapsto f(x,y)$ sont intégrables.

(ii) $x \mapsto \int_Y f(x,y) \, \mathrm{d}\nu(y)$ et $y \mapsto \int_X f(x,y) \, \mathrm{d}\mu(x)$ sont intégrables, les fonctions étant définies pp.

(iii) On a :
$$\int_{X \times Y} f \, \mathrm{d}(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y) \, \mathrm{d}\nu(y) \right) = \int_Y \left(\int_X f(x,y) \, \mathrm{d}\mu(x) \right)$$

Contre-exemple 16. On considère $f : (x, y) \mapsto 2e^{-2xy} - e^{-xy}$. Alors, $\int_{[0,1]} \left(\int_{\mathbb{R}^+} f(x, y)\,dx\right) dy = 0$, mais $\int_{\mathbb{R}^+} \left(\int_{[0,1]} f(x, y)\,dy\right) dx = \ln(2)$.

[GOU20] p. 359

Exemple 17. Soient $f : (x, y) \mapsto xy$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 1\}$. Alors,

$$\int\int_D = f(x, y)\,dx dy = \int_0^1 x\frac{(1-x)^2}{2}\,dx = \frac{1}{24}$$

2. Changement de variable généralisé

[BMP] p. 9

Théorème 18. Soient E et F deux espaces de Banach et $U \subseteq E$ un ouvert. Soit $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$. Alors, $V = \varphi(U)$ est mesurable et tout fonction f appartient à L_1 si et seulement si $|\det \mathrm{Jac}(\varphi)_a| f \circ \varphi$ appartient à L_1. Dans ce cas,

$$\int_V f(x)\,dx = \int_U |\det \mathrm{Jac}(\varphi)_a| f(\varphi(y))\,dy$$

[GOU20] p. 355

Exemple 19 (Coordonnées polaires)**.** L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] & \to & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (r, \theta) & \mapsto & (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \end{array}$$

est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$ donc le jacobien en $(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi]$ vaut r.

Exemple 20 (Coordonnées sphériques)**.** L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \to & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (r, \theta, \varphi) & \mapsto & (r\cos(\varphi)\cos(\theta), r\cos(\varphi)\sin(\theta), r\sin(\varphi)) \end{array}$$

est un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$ donc le jacobien en $(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ vaut $r^2\cos(\varphi)$.

Application 21 (Intégrale de Gauss)**.** En passant en coordonnées polaires,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

III - Utilisation des théorèmes d'intégration

Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ et $(Y, \mathscr{B}, \nu)$ un espace mesuré.

1. Convergence dominée

Théorème 22 (Convergence dominée)**.** Soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathscr{L}_1$ telle que : [B-P] p. 140

(i) pp. en x, $(f_n(x))$ converge dans $\mathbb{K}$ vers $f(x)$.

(ii) $\exists g \in \mathscr{L}_1$ positive telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{pp. en } x, |f_n(x)| \leq g(x)$$

Alors,

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu \text{ et } \lim_{n \to +\infty} \int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0$$

Exemple 23. Soit $\alpha > 1$. On pose $\forall n \geq 1$, $I_n(\alpha) = \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x} \,\mathrm{d}x$. Alors,

$$\lim_{n \to +\infty} I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{(1-\alpha)x} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha - 1}$$

Exemple 24. [AMR11] p. 156

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{2n} + 1} \,\mathrm{d}x = 0$$

Exemple 25. [G-K] p. 104

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^3 + 1} \,\mathrm{d}x = \frac{3\ln(2) + \sqrt{3}\pi}{9}$$

2. Régularité sous l'intégrale

Soit $f : E \times X \to \mathbb{C}$ où (E, d) est un espace métrique. On pose $F : t \mapsto \int_X f(t, x) \,\mathrm{d}\mu(x)$. [Z-Q] p. 312

Théorème 26 (Continuité sous le signe intégral)**.** On suppose :

(i) $\forall t \in E$, $x \mapsto f(t, x)$ est mesurable.

(ii) pp. en $x \in X$, $t \mapsto f(t, x)$ est continue en $t_0 \in E$.

(iii) $\exists g \in L_1(X)$ positive telle que

$$|f(t, x)| \leq g(x) \quad \forall t \in E, \text{pp. en } x \in X$$

Alors F est continue en t_0.

Exemple 27. La fonction Γ de l'Exemple 11 est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_*^+$. p. 318

On suppose maintenant que E est un intervalle I ouvert de $\mathbb{R}$.

p. 313

Théorème 28 (Dérivation sous le signe intégral)**.** On suppose :

(i) $\forall t \in I$, $x \mapsto f(t,x) \in L_1(X)$.

(ii) pp. en $x \in X$, $t \mapsto f(t,x)$ est dérivable sur I. On notera $\frac{\partial f}{\partial t}$ cette dérivée définie presque partout.

(iii) $\forall K \subseteq I$ compact, $\exists g_K \in L_1(X)$ positive telle que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g_K(x) \quad \forall t \in I, \text{pp. en } x$$

Alors $\forall t \in I$, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \in L_1(X)$ et F est dérivable sur I avec

$$\forall t \in I, F'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

Application 29 (Transformée de Fourier d'une Gaussienne)**.** En résolvant une équation différentielle linéaire, on a [GOU20] p. 169

$$\forall \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha t^2} e^{-itx}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{x^2}{\pi\alpha}}$$

[DEV]

Application 30 (Intégrale de Dirichlet)**.** On pose $\forall x \geq 0$, [G-K] p. 107

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

alors :

(i) F est bien définie et est continue sur $\mathbb{R}^+$.

(ii) F est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_*^+$, $F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.

(iii) $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

IV - Utilisation de l'analyse complexe

1. Formule intégrale de Cauchy

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$.

[QUE] p. 134

Théorème 31 (Cauchy homologique)**.** Soit Γ un cycle homologue à zéro dans Ω (ie. tel que $z \notin \Omega \implies I(a,\Gamma) = 0$). On suppose $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Alors,

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Corollaire 32 (Formule intégrale de Cauchy)**.** Soit Γ un cycle homologue à zéro dans Ω. On suppose $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Alors,

$$z_0 \in \Omega \setminus \Gamma^* \implies \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z = I(z_0, \gamma) f(z_0)$$

Corollaire 33. On a $\mathscr{H}(\Omega) \subseteq \mathscr{A}(\Omega)$. De plus, si $a \in \Omega$ et que l'on pose $d = d(a, \mathbb{C} \setminus \Omega)$, on a p. 85

$$f(a+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n h^n \text{ pour } |h| < d \text{ avec } a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+(a,d)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \, \mathrm{d}z$$

[BMP] p. 64

[DEV] **Application 34** (Transformée de Fourier d'une gaussienne)**.** On définit $\forall a \in \mathbb{R}_*^+$, [AMR08] p. 156

$$\gamma_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-ax^2} \end{array}$$

Alors,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{\gamma_a}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{-\xi^2}{4a}}$$

2. Théorème des résidus

Théorème 35 (des résidus)**.** On suppose f méromorphe sur Ω et on note A l'ensemble de ses pôles. Soit γ une courbe homologue à zéro dans Ω et ne rencontrant pas A. Alors, [QUE] p. 169

$$\int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z = 2i\pi \sum_{a \in A} I(a, \gamma) \mathrm{Res}(f, a)$$

Exemple 36. p. 173

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 + 2\cos(t)} \, \mathrm{d}t = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}$$

Exemple 37 (Intégrale de Dirichlet)**.**

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

V - Calcul approché d'intégrales

Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle $[a, b]$. On se donne $n+1$ points $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ distincts deux-à-deux. [DEM] p. 21

Définition 38. Pour $i \in [\![0, n]\!]$, on définit le i-ième **polynôme de Lagrange** associé à $x_1, \dots, x_n$ par

$$\ell_i : x \mapsto \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Théorème 39. Il existe une unique fonction polynômiale p_n de degré n telle que $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $p_n(x_i) = f(x_i)$:

$$p_n = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i$$

Théorème 40. On note $\pi_{n+1} : x \mapsto \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$ et on suppose f $n+1$ fois dérivable $[a, b]$. Alors, pour tout $x \in [a, b]$, il existe un réel $\xi_x \in]\min(x, x_i), \max(x, x_i)[$ tel que

$$f(x) - p_n(x) = \frac{\pi_{n+1}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)$$

Corollaire 41.

$$\|f - p_n\|_\infty \leq \frac{1}{(n+1)!} \|\pi_{n+1}\|_\infty \|f^{(n+1)}\|_\infty$$

Application 42 (Calculs approchés d'intégrales)**.** On note $I(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. L'objectif est d'approximer $I(f)$ par une expression $P(f)$ et de majorer l'erreur d'approximation $E(f) = |I(f) - P(f)|$. [DAN] p. 506

(i) Méthode des rectangles. On suppose f continue. Avec $P(f) = (b-a)f(a)$, on a $E(f) \leq \frac{(b-a)^2}{2} \|f'\|_\infty$.

(ii) Méthode du point milieu. On suppose f de classe $\mathscr{C}^2$. Avec $P(f) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, on a $E(f) \leq \frac{(b-a)^3}{24} \|f''\|_\infty$.

(iii) Méthode des trapèzes. On suppose f de classe $\mathscr{C}^2$. Avec $P(f) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$, on a $E(f) \leq \frac{(b-a)^3}{12} \|f''\|_\infty$.

(iv) Méthode de Simpson. On suppose f de classe $\mathscr{C}^4$. Avec $P(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$, on a $E(f) \leq \frac{(b-a)^3}{2880} \|f^{(4)}\|_\infty$.