

## 241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

### I - Généralités

#### 1. Suites de fonctions

**Définition 1.** Soient  $(f_n)$  et  $f$  respectivement une suite de fonctions et une fonction définies sur un ensemble  $X$  à valeurs dans un espace métrique  $(E, d)$ . On dit que :

—  $(f_n)$  **converge simplement** vers  $f$  si

$$\forall x \in X, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$$

—  $(f_n)$  **converge uniformément** vers  $f$  si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, \forall x \in X, d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$$

[GOU20]  
p. 231

**Proposition 2.** La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

**Contre-exemple 3.** La réciproque est fautive. Il suffit en effet de considérer la suite  $(f_n)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $x \in [0, 1[$  par  $f_n(x) = x^n$  converge simplement sur  $[0, 1]$  mais pas uniformément.

**Théorème 4** (Critère de Cauchy uniforme). Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions définies sur un ensemble  $X$  à valeurs dans un espace métrique  $(E, d)$ . Alors  $(f_n)$  converge uniformément si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p > q \geq N, \forall x \in X, d(f_p(x), f_q(x)) < \epsilon$$

**Corollaire 5.** Une limite uniforme sur  $\mathbb{R}$  de fonctions polynômiales est une fonction polynômiale.

p. 237

**Notation 6.** — Pour toute fonction  $g$  bornée sur un ensemble  $X$  et à valeurs dans un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$ , on note

$$\|g\|_\infty = \sup_{x \in X} \|g(x)\|$$

— On note  $\mathcal{B}(X, E)$  l'ensemble des applications bornées de  $X$  dans  $E$ .

p. 232

**Proposition 7.** En reprenant les notations précédentes, une suite de fonctions  $(f_n)$  de  $\mathcal{B}(X, E)$  converge uniformément vers  $f \in \mathcal{B}(X, E)$  si  $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

**Exemple 8.** La suite de fonctions  $(f_n)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $f_n : x \mapsto (1 - \frac{x}{n})^n \mathbb{1}_{[0, n]}$  converge uniformément vers  $f : x \mapsto e^{-x}$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

## 2. Séries de fonctions

**Définition 9.** Soit  $(g_n)$  une suite de fonctions. On appelle **série de fonctions** de terme général  $g_n$ , notée  $\sum g_n$  la suite de fonctions  $(S_n)$  où

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n g_k$$

p. 232

**Définition 10.** Soient  $X$  un ensemble et  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. On dit qu'une série de fonctions à termes dans  $\mathcal{B}(X, E)$  **converge normalement** si la série numérique  $\sum \|g_n\|_\infty$  converge.

*Remarque 11.* En reprenant les notations précédentes, il est équivalent de dire qu'une série de fonctions  $\sum g_n$  converge normalement s'il existe une série à termes positifs  $\sum a_n$  convergente et telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, \|g_n(x)\| \leq a_n$$

**Exemple 12.** La série de fonctions  $\sum g_n$  où  $(g_n)$  est définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, g_n : x \mapsto \frac{x^n}{n^2}$$

converge normalement sur  $[0, 1]$  car  $\|g_n\| = \frac{1}{n^2}$ .

**Théorème 13.** Une série de fonctions à valeurs dans un espace de Banach qui converge normalement sur un ensemble  $X$  converge uniformément sur  $X$ .

**Contre-exemple 14.** La réciproque est fautive. Par exemple, la série de fonctions  $\sum (-1)^n g_n$  où  $(g_n)$  est définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, g_n : x \mapsto \frac{x}{n^2 + x^2}$$

converge uniformément sur  $\mathbb{R}^+$  mais pas normalement.

### 3. Définition sur un compact

**Théorème 15** (Théorèmes de Dini). (i) Soit  $(f_n)$  une suite *croissante* de fonctions réelles *continues* définies sur un segment  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Si  $(f_n)$  converge simplement vers une fonction *continue* sur  $I$ , alors la convergence est uniforme.

p. 238

(ii) Soit  $(f_n)$  une suite de *fonctions croissantes* réelles *continues* définies sur un segment  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Si  $(f_n)$  converge simplement vers une fonction *continue* sur  $I$ , alors la convergence est uniforme.

**Théorème 16** (Bernstein). Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  continue. On note

p. 242

$$B_n(f) : x \mapsto \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Alors,

$$\|B_n(f) - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

**Corollaire 17** (Weierstrass). Toute fonction continue  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  (avec  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a \leq b$ ) est limite uniforme de fonctions polynômiales sur  $[a, b]$ .

p. 304

On a une version plus générale de ce théorème.

**Théorème 18** (Stone-Weierstrass). Soit  $K$  un espace compact et  $\mathcal{A}$  une sous-algèbre de l'algèbre de Banach réelle  $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ . On suppose de plus que :

[LI]  
p. 46

(i)  $\mathcal{A}$  sépare les points de  $K$  (ie.  $\forall x \in K, \exists f \in \mathcal{A}$  telle que  $f(x) \neq f(y)$ ).

(ii)  $\mathcal{A}$  contient les constantes.

Alors  $\mathcal{A}$  est dense dans  $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ .

*Remarque 19.* Il existe aussi une version "complexe" de ce théorème, où il faut supposer de plus que  $\mathcal{A}$  est stable par conjugaison.

**Exemple 20.** La suite de polynômes réels  $(r_n)$  définie par récurrence par

$$r_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, r_{n+1} : t \mapsto r_n(t) + \frac{1}{2}(t - r_n(t))^2$$

converge vers  $\sqrt{\cdot}$  sur  $[0, 1]$ .

## II - Régularité de la limite

### 1. Continuité

**Théorème 21** (de la double limite). Soient  $X$  une partie non vide d'un espace vectoriel normé de dimension finie,  $E$  un espace de Banach,  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $X$  dans  $E$  et  $a \in \bar{X}$ . On suppose :

- (i)  $(f_n)$  converge uniformément sur  $X$ .
- (ii)  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n(x)$  admet une limite quand  $x$  tend vers  $a$ .

Alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow a} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right)$$

[AMR11]  
p. 146

**Théorème 22.** Soient  $X$  une partie non vide d'un espace vectoriel normé de dimension finie,  $E$  un espace de Banach,  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $X$  dans  $E$  et  $a \in X$ . On suppose :

- (i)  $(f_n)$  converge uniformément sur  $X$  vers  $f$ .
- (ii)  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n(x)$  est continue en  $a$ .

Alors  $f$  est continue en  $a$ .

**Exemple 23.** La suite  $(f_n)$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $f_n : x \mapsto e^{-nx}$  converge vers

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Les fonctions  $f_n$  sont continues, mais  $f$  ne l'est pas : on n'a pas convergence uniforme sur  $\mathbb{R}^+$ .

**Théorème 24.** Soient  $X$  une partie non vide d'un espace vectoriel normé,  $E$  un espace de Banach,  $\sum f_n$  une série de fonctions de  $X$  dans  $E$  et  $a \in \bar{X}$ . On suppose :

- (i)  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $X$ .
- (ii)  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n(x)$  admet une limite  $\ell_n$  quand  $x$  tend vers  $a$ .

Alors,  $\sum \ell_n$  converge dans  $E$  et,

$$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$$

p. 195

**Théorème 25.** Soient  $X$  une partie non vide d'un espace vectoriel normé,  $E$  un espace de Banach,  $\sum f_n$  une série de fonctions de  $X$  dans  $E$  et  $a \in X$ . On suppose :

(i)  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $X$ .

(ii)  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue en  $a$ .

Alors,  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  est continue en  $a$ .

**Exemple 26.** La fonction  $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-n|x|}}{n^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

## 2. Dérivabilité

**Théorème 27.** Soient  $I$  un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$ ,  $E$  un espace vectoriel normé et  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $I$  dans  $E$ . On suppose :

(i)  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est dérivable sur  $I$ .

(ii)  $(f_n)$  converge simplement sur  $I$  vers  $f$ .

(iii)  $(f'_n)$  converge uniformément sur  $I$ .

Alors  $f$  est dérivable sur  $I$  et  $\forall x \in I$ ,  $f'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x)$ .

p. 148

**Contre-exemple 28.** La suite  $(f_n)$  définie sur  $\mathbb{R}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $f_n : x \mapsto \left(x^2 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$  converge vers  $x \mapsto |x|$ , qui n'est pas dérivable à l'origine bien que les  $f_n$  le soient.

**Théorème 29.** Soient  $I = [a, b]$  un segment non vide de  $\mathbb{R}$ ,  $E$  un espace de Banach et  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $I$  dans  $E$ . On suppose :

(i)  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ .

(ii) Il existe  $x_0 \in I$  tel que  $(f_n(x_0))$  converge.

(iii)  $(f'_n)$  converge uniformément sur  $I$  vers  $g$ .

Alors  $(f_n)$  converge uniformément sur  $I$  vers  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et  $f' = g$ .

p. 198

**Théorème 30.** Soient  $I$  un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$ ,  $E$  un espace de Banach et  $\sum f_n$  une série de fonctions de  $I$  dans  $E$ . On suppose :

(i)  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est dérivable sur  $I$ .

(ii) Il existe  $x_0 \in I$  tel que  $\sum f_n(x_0)$  converge.

(iii)  $\sum f'_n$  converge uniformément sur  $I$ .

Alors  $\sum f_n$  converge simplement sur  $I$  uniformément sur tout compact de  $I$ , et,

$$\left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$$

**Exemple 31.** La fonction  $\zeta : s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]1, +\infty[$  et,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall s \in ]1, +\infty[, \zeta^{(k)}(s) = (-1)^k \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln(s))^k}{n^s}$$

### 3. Mesurabilité, intégrabilité

**Théorème 32.** Soient  $I = [a, b]$  un segment non vide de  $\mathbb{R}$ ,  $E$  un espace de Banach et  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $I$  dans  $E$ . On suppose :

- (i)  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue sur  $I$ .
- (ii)  $(f_n)$  converge uniformément sur  $I$  vers  $f$ .

Alors  $f$  est continue et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt$ . Plus généralement, la fonction  $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  est limite uniforme sur  $I$  de la suite de fonctions  $(F_n)$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t) dt$$

*Remarque 33.* L'interversion se fait sous des hypothèses beaucoup moins contraignantes à l'aides du théorème de convergence dominée.

**Théorème 34** (Convergence monotone). Soit  $(f_n)$  une suite croissante de fonctions mesurables positives. Alors, la limite  $f$  de cette suite est mesurable positive, et,

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n d\mu$$

**Théorème 35** (Lemme de Fatou). Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions mesurables positives. Alors,

$$0 \leq \int_X \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int_X f_n d\mu \leq +\infty$$

**Exemple 36.** Soit  $f$  croissante sur  $[0, 1]$ , continue en 0 et dérivable en 1 et dérivable pp. dans  $[0, 1]$ . Alors,

$$\int_0^1 f'(x) dx \leq f(1) - f(0)$$

**Théorème 37** (Convergence dominée). Soit  $(f_n)$  une suite d'éléments de  $\mathcal{L}_1$  telle que :

- (i) pp. en  $x$ ,  $(f_n(x))$  converge dans  $\mathbb{K}$  vers  $f(x)$ .

[GOU20]  
p. 233

[B-P]  
p. 124

p. 137

(ii)  $\exists g \in \mathcal{L}_1$  positive telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ pp. en } x, |f_n(x)| \leq g(x)$$

Alors,

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X f_n \, d\mu \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0$$

**Exemple 38.** — On reprend l'Exemple 36 et on suppose  $f$  partout dérivable sur  $[0, 1]$  de dérivée bornée. Alors l'inégalité est une égalité.

— Soit  $\alpha > 1$ . On pose  $\forall n \geq 1, I_n(\alpha) = \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x} \, dx$ . Alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{(1-\alpha)x} \, dx = \frac{1}{\alpha - 1}$$

**Exemple 39.**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{2n} + 1} \, dx = 0$$

[AMR11]  
p. 156

### III - Séries particulières

#### 1. Séries entières

**Définition 40.** On appelle **série entière** toute série de fonctions de la forme  $\sum a_n z^n$  où  $z$  est une variable complexe et où  $(a_n)$  est une suite complexe.

[GOU20]  
p. 247

**Lemme 41 (Abel).** Soient  $\sum a_n z^n$  une série entière et  $z_0 \in \mathbb{C}$  tels que  $(a_n z_0^n)$  soit bornée. Alors :

(i)  $\forall z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < |z_0|$ ,  $\sum a_n z^n$  converge absolument.

(ii)  $\forall r \in ]0, |z_0|[$ ,  $\sum a_n z^n$  converge normalement dans  $\overline{D}(0, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$ .

**Définition 42.** En reprenant les notations précédentes, le nombre

$$R = \sup\{r \geq 0 \mid (|a_n| r^n) \text{ est bornée}\}$$

est le **rayon de convergence** de  $\sum a_n z^n$ .

**Exemple 43.** —  $\sum n^2 z^n$  a un rayon de convergence égal à 1.

—  $\sum \frac{z^n}{n!}$  a un rayon de convergence infini. On note  $z \mapsto e^z$  la fonction somme.

p. 255

**Proposition 44.** Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $r \neq 0$ . Alors  $S \in \mathcal{H}(D(0, r))$  et,

$$S'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$$

pour tout  $z \in D(0, r)$ .

Plus précisément, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $S$  est  $k$  fois dérivable avec

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n z^{n-k}$$

[DEV]

**Théorème 45** (Abel angulaire). Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 tel que  $\sum a_n$  converge. On note  $f$  la somme de cette série sur le disque unité  $D$  de  $\mathbb{C}$ . On fixe  $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$  et on pose  $\Delta_{\theta_0} = \{z \in D \mid \exists \rho > 0 \text{ et } \exists \theta \in [-\theta_0, \theta_0] \text{ tels que } z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$ .

Alors  $\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ .

[GOU20]  
p. 263

**Application 46.**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} = \frac{\pi}{4}$$

**Application 47.**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$$

**Contre-exemple 48.** La réciproque est fautive :

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| < 1}} (-1)^n z^n = \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| < 1}} \frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}$$

**Théorème 49** (Taubérien faible). Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence 1. On note  $f$  la somme de cette série sur  $D(0, 1)$ . On suppose que

$$\exists S \in \mathbb{C} \text{ tel que } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = S$$

Si  $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ , alors  $\sum a_n$  converge et  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$ .

*Remarque 50.* Ce dernier résultat est une réciproque partielle du Théorème 45. Il reste vrai en supposant  $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$  (c'est le théorème Taubérien fort).



## 2. Séries de Fourier

**Notation 51.** — Pour tout  $p \in [1, +\infty]$ , on note  $L_p^{2\pi}$  l'espace des fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $2\pi$ -périodiques et mesurables, telles que  $\|f\|_p < +\infty$ .

— Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on note  $e_n$  la fonction  $2\pi$ -périodique définie pour tout  $t \in \mathbb{R}$  par  $e_n(t) = e^{int}$ .

[Z-Q]  
p. 73

**Définition 52.** Soit  $f \in L_1^{2\pi}$ . On appelle :

— **Coefficients de Fourier complexes**, les complexes définis par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt = \langle f, e_n \rangle$$

— **Série de Fourier** associée à  $f$  la série  $(S_N(f))$  définie par

$$\forall N \in \mathbb{N}, S_N(f) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e_n \stackrel{(*)}{=} \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx))$$

[GOU20]  
p. 268

**Théorème 53** (Dirichlet). Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $2\pi$ -périodique, continue par morceaux sur  $\mathbb{R}$  et  $t_0 \in \mathbb{R}$  tels que la fonction

$$h \mapsto \frac{f(t_0 + h) + f(t_0 - h) - f(t_0^+) - f(t_0^-)}{h}$$

est bornée au voisinage de 0. Alors,

$$S_N(f)(t_0) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}$$

p. 271

**Contre-exemple 54.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  paire,  $2\pi$ -périodique telle que :

$$\forall x \in [0, \pi], f(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \sin\left((2^{p^3} + 1) \frac{x}{2}\right)$$

Alors  $f$  est bien définie et continue sur  $\mathbb{R}$ . Cependant, sa série de Fourier diverge en 0.

**Corollaire 55.** Soient  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $2\pi$ -périodique,  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$ . Alors,

$$\forall x \in \mathbb{R}, S_N(f)(x) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

En particulier, si  $f$  est continue en  $x$ , la série de Fourier de  $f$  converge vers  $f(x)$ .

**Exemple 56.** En reprenant la fonction de l'Exemple 56,

$$\forall x \in [-\pi, \pi], f(x) = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

**Proposition 57.** Soit  $f \in L_1^{2\pi}$  et telle que sa série de Fourier converge normalement. Alors, la somme  $g : x \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n(x)$  est une fonction continue  $2\pi$ -périodique presque partout égale à  $f$ . De plus, si  $f$  est continue, l'égalité  $f(x) = g(x)$  est vraie pour tout  $x$ .

[BMP]  
p. 128

**Proposition 58.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $2\pi$ -périodique continue et  $\mathcal{C}^1$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$ . Alors  $(S_N(f))$  converge normalement vers  $f$ .

**Application 59** (Développement eulérien de la cotangente).

$$\forall u \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \cotan(u) = \frac{1}{u} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2u}{u^2 - n^2\pi^2}$$

[AMR08]  
p. 211

**Théorème 60** (Formule sommatoire de Poisson). Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$  et  $f'(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$  quand  $|x| \rightarrow +\infty$ . Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi n) e^{2i\pi n x}$$

[GOU20]  
p. 284

**Application 61** (Identité de Jacobi).

$$\forall s > 0, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{s}}$$

# Bibliographie

## **Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels**

[AMR08]

Mohammed EL-AMRANI. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels. Niveau M1*. Ellipses, 28 août 2008.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3908-14232-analyse-de-fourier-dans-les-espaces-fonctionnels-niveau-m1-9782729839031.html>.

## **Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions**

[AMR11]

Mohammed EL-AMRANI. *Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions*. Ellipses, 15 nov. 2011.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3910-14234-suites-et-series-numeriques-suites-et-series-de-fonctions-9782729870393.html>.

## **Objectif agrégation**

[BMP]

Vincent BECK, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ. *Objectif agrégation*. 2<sup>e</sup> éd. H&K, 22 août 2005.

<https://objectifagregation.github.io>.

## **Analyse**

[B-P]

Marc BRIANE et Gilles PAGES. *Analyse. Théorie de l'intégration*. 8<sup>e</sup> éd. De Boeck Supérieur, 29 août 2023.

<https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807359550-analyse-theorie-de-l-integration>.

## **Les maths en tête**

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.

## **Cours d'analyse fonctionnelle**

[LI]

Daniel LI. *Cours d'analyse fonctionnelle. avec 200 exercices corrigés*. Ellipses, 3 déc. 2013.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/6558-cours-danalyse-fonctionnelle-avec-200-exercices-corriges-9782729883058.html>.

## **Analyse complexe et applications**

[QUE]

Martine QUEFFÉLLEC et Hervé QUEFFÉLEC. *Analyse complexe et applications. Nouveau tirage*. Calvage & Mounet, 13 mai 2017.

<http://www.calvage-et-mounet.fr/2022/05/09/analyse-complexe-et-applications/>.

---

Claude ZUILY et Hervé QUEFFÉLEC. *Analyse pour l'agrégation. Agrégation/Master Mathématiques*.  
5<sup>e</sup> éd. Dunod, 26 août 2020.

<https://www.dunod.com/prepas-concours/analyse-pour-agregation-agregationmaster-mathematiques>.