# 244 Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

## I - La fonction exponentielle

### 1. Dans le champ complexe

**Définition 1.** On définit la fonction **exponentielle complexe** pour tout $z \in \mathbb{C}$ par

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

on note cette somme $e^z$ ou parfois $\exp(z)$.

[QUE] p. 4

*Remarque* 2. Cette somme est bien définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ d'après le critère de d'Alembert.

**Proposition 3.** (i) $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

(ii) exp est holomorphe sur $\mathbb{C}$, de dérivée elle-même.

(iii) exp ne s'annule jamais.

(iv) $|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}(z))$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

**Proposition 4.** La fonction $\varphi : t \mapsto e^{it}$ est un morphisme surjectif de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{U}$.

**Proposition 5.** En reprenant les notations précédentes, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$, de la forme $\mathrm{Ker}(\varphi) = a\mathbb{Z}$. On note $a = 2\pi$.

**Application 6.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il y a $n$ racines $n$-ièmes de l'unité, données par

$$e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \cos\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)$$

où $k$ parcourt les entiers de 0 à $n-1$.

[R-R] p. 259

**Corollaire 7.** Tout nombre complexe non nul $\alpha$ écrit $\alpha = re^{i\theta}$ admet exactement $n$ racines $n$-ièmes données par

$$\sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}} e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

où $k$ parcourt les entiers de 0 à $n-1$.

## 2. Dans le champ réel

**Définition 8.** On a plusieurs définitions (équivalentes) de la fonction exponentielle réelle. [D-L] p. 528

- **Vision "moderne" :** Soit $x \in \mathbb{R}$. $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ (restriction de la série entière de la Définition 1).
- **Vision "pédagogique" :** exp est l'unique solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- **Vision "historique" :** Soit $x \in \mathbb{R}$. $\exp(x) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

**Théorème 9.** [QUE] p. 6

(i) exp est une bijection croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_*^+$.

(ii) $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$.

(iii) $x < 0 \iff \exp(x) < 1$.

## 3. Fonctions trigonométriques

**Définition 10.** On définit les fonctions sin et cos sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \sin(t) = \operatorname{Im}(\exp(it)) \text{ et } \sin(t) = \operatorname{Re}(\exp(it))$$

**Proposition 11.** Soit $t \in \mathbb{R}$. [DAN] p. 352

(i) $\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

(ii) $\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$.

(iii) Ces fonctions sont réelles, $2\pi$-périodiques et admettent un développement en série entière de rayon de convergence infini. Ceci permet de les prolonger de manière unique sur tout le plan complexe.

(iv) sin et cos sont dérivables avec $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$.

(v) cos est paire, sin est impaire.

**Proposition 12.** L'application [ROM21] p. 36

$$\exp(i\theta) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

définit un isomorphisme de $\mathbb{U}$ dans $SO_2(\mathbb{R})$.

## 4. Polynômes trigonométriques

**Définition 13.** — On appelle **polynôme trigonométrique** de degré inférieur à $N \in \mathbb{N}$ toute fonction de la forme $x \mapsto \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$ avec $\forall n \in [\![-N, N]\!]$, $c_n \in \mathbb{C}$.

— On appelle **série trigonométrique** une série de fonctions de la variable réelle $x$ et de la forme $c_n + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx})$, notée $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$.

[GOU20] p. 268

**Exemple 14.** — Pour tout $N \in \mathbb{N}$, la fonction $D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_N$ est appelée **noyau de Dirichlet** d'ordre $N$.

— Pour tout $N \in \mathbb{N}$, la fonction $K_N = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} D_j$ est appelé **noyau de Fejér** d'ordre $N$.

[AMR08] p. 184

**Théorème 15** (Fejér)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction $2\pi$-périodique.

(i) Si $f$ est continue, alors $\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ et $(\sigma_N(f))$ converge uniformément vers $f$.

(ii) Si $f \in L_p^{2\pi}$ pour $p \in [1, +\infty[$, alors $\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$ et $(\sigma_N(f))$ converge vers $f$ pour $\|.\|_p$.

p. 190

**Corollaire 16.** L'espace des polynômes trigonométriques $\{\sum_{n=-N}^{N} c_n e_n \mid (c_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, N \in \mathbb{N}\}$ est dense dans l'espace des fonction continues $2\pi$-périodiques pour $\|.\|_\infty$ et est dense dans $L_p^{2\pi}$ pour $\|.\|_p$ avec $p \in [1, +\infty[$.

**Théorème 17** (Dirichlet)**.** Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $2\pi$-périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ tels que la fonction

$$h \mapsto \frac{f(t_0 + h) + f(t_0 - h) - f(t_0^+) - f(t_0^-)}{h}$$

est bornée au voisinage de 0. Alors,

$$S_N(f)(t_0) \longrightarrow_{N \to +\infty} \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}$$

[GOU20] p. 271

**Contre-exemple 18.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire, $2\pi$-périodique telle que :

$$\forall x \in [0, \pi], f(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \sin\left((2^{p^3} + 1)\frac{x}{2}\right)$$

Alors $f$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. Cependant, sa série de Fourier diverge en 0.

**Corollaire 19.** Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $2\pi$-périodique, $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ S_N(f)(x) \longrightarrow_{N\to+\infty} \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

En particulier, si $f$ est continue en $x$, la série de Fourier de $f$ converge vers $f(x)$.

**Exemple 20.** On considère $f : x \mapsto 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$ sur $[-\pi, \pi]$. Alors,

$$\forall x \in [-\pi,\pi],\ f(x) = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

**Théorème 21** (Formule sommatoire de Poisson)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $f'(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ quand $|x| \longrightarrow +\infty$. Alors : p. 284

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(2\pi n) e^{2i\pi nx}$$

**Application 22** (Identité de Jacobi)**.**

$$\forall s > 0,\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{s}}$$

# II - Logarithmes

## 1. Logarithme dans le champ réel

**Proposition 23.** exp réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^+_*$. [DAN] p. 346

**Définition 24.** La bijection réciproque de $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+_*$ est appelée **logarithme népérien** et est notée ln.

**Théorème 25.** (i) $\forall x \in \mathbb{R}^+_*,\ \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

(ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}^+_*,\ \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

*Remarque* 26. La fonction ln permet de définir la mise à la puissance par un réel :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+_*,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ t^\alpha = e^{\alpha \ln(t)}$$

## 2. Logarithmes dans le champ complexe

**Théorème 27.** Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\Omega_\alpha = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^* e^{i\alpha}$. Alors, il existe une fonction $L_\alpha$ holomorphe sur $\Omega_\alpha$. Elle vérifie : [QUE] p. 81

(i) $e^{L_\alpha(z)} = z$ pour tout $z \in \Omega_\alpha$.

(ii) $L_\alpha(z) = \ln(|z|) + i\theta_\alpha(z)$ avec $\theta_\alpha \in ]\alpha, \alpha + 2\pi[$.

(iii) $L_\alpha$ est dérivable dans $\Omega_\alpha$ avec $L'(z) = \frac{1}{z}$ pour tout $z \in \Omega_\alpha$.

**Définition 28.** La fonction $L_\alpha$ précédente est appelée **détermination d'ordre** $\alpha$ (ou **détermination principale** si $\alpha = -\pi$) du logarithme.

**Théorème 29.** On pose $D = D(0,1)$ et on définit $\ell : D \to \mathbb{C}$ par $\ell : z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$. Alors :

(i) $1 + z = \exp(\ell(z))$ pour tout $z \in D$.

(ii) $\ell(z) = L_{-\pi}(1+z)$ pour tout $z \in D$.

# III - La fonction $\Gamma$ d'Euler

## 1. Définition

**Définition 30.** On pose [GOU20] p. 162

$$\forall x > 0, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \, \mathrm{d}t$$

**Proposition 31.** (i) $\Gamma$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^n e^{-t} t^{x-1} \, \mathrm{d}t$$

(ii) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

(iii) $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et en particulier, $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n) = n!$.

**Lemme 32.** La fonction $\Gamma$ définie pour tout $x > 0$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t$ vérifie : [ROM19-1] p. 364

(i) $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(ii) $\Gamma(1) = 1$.

(iii) $\Gamma$ est log-convexe sur $\mathbb{R}_*^+$.

[DEV]

**Théorème 33** (Bohr-Mollerup)**.** Soit $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}^+$ vérifiant le Point (i), Point (ii) et Point (iii) du Lemme 32. Alors $f = \Gamma$.

*Remarque* 34. À la fin de la preuve, on obtient une formule due à Gauss :

$$\forall x \in ]0,1], \Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^x n!}{(x+n)\dots(x+1)x}$$

que l'on peut aisément étendre à $\mathbb{R}_*^+$ entier.

**Lemme 35.** Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim \Gamma(a, \gamma)$ et $Y \sim \Gamma(b, \gamma)$. Alors $Z = X + Y \sim \Gamma(a+b, \gamma)$. [G-K] p. 180

[DEV] **Application 36** (Formule de Stirling)**.** p. 556

$$n! \sim \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

## 2. Prolongement complexe

On suppose ici que $E$ est un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{C}$. [Z-Q] p. 314

**Théorème 37** (Holomorphie sous le signe intégral)**.** On suppose :

(i) $\forall z \in \Omega$, $x \mapsto f(z,x) \in L_1(X)$.

(ii) pp. en $x \in X$, $z \mapsto f(z,x)$ est holomorphe dans $\Omega$. On notera $\frac{\partial f}{\partial z}$ cette dérivée définie presque partout.

(iii) $\forall K \subseteq \Omega$ compact, $\exists g_K \in L_1(X)$ positive telle que

$$|f(x,z)| \leq g_K(x) \quad \forall z \in K, \text{pp. en } x$$

Alors $F$ est holomorphe dans $\Omega$ avec

$$\forall z \in \Omega,\ F'(z) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)\,\mathrm{d}\mu(z)$$

**Exemple 38.** La fonction $\Gamma$ est holomorphe dans l'ouvert $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$. p. 318

**Théorème 39.** On peut prolonger $\Gamma$ en une fonction holomorphe non nulle sur $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$.

[QUE] p. 255

**Théorème 40** (Formule des compléments)**.**

$$\forall \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{Z}, \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

# IV - La fonction $\zeta$ de Riemann

## 1. Définition

**Définition 41.** Pour tout $s > 1$, on pose [GOU20] p. 302

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

**Proposition 42.** $\zeta$ définit une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et,

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall s \in ]1, +\infty[, \zeta^{(p)}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)^p}{n^s}$$

**Proposition 43.**

$$\lim_{s \to +\infty} \zeta(s) = 1 \text{ et } \zeta(s) \sim_{1^+} \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1)$$

où $\gamma$ désigne la constante d'Euler.

**Proposition 44.** [G-K] p. 108

$$\forall s > 1, \zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \, \mathrm{d}t$$

## 2. Prolongement complexe

**Proposition 45.** On prolonge la définition de $\zeta$ donnée à la Définition 41 en posant [Z-Q] p. 20

$$\zeta : \begin{array}{ccc} \{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 0\} & \to & \mathbb{C} \\ s & \mapsto & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \end{array}$$

**Proposition 46.** $\zeta$ est holomorphe sur $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 1\}$.

**Théorème 47.** Il existe une fonction $\widetilde{\zeta}$, holomorphe dans $\mathbb{C} \smallsetminus \{1\}$ telle que : p. 28

(i) Pour tout $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $\widetilde{\zeta}(s) = \frac{1}{s-1} + \eta(s)$ avec $\eta$ holomorphe dans $\mathbb{C}$.
(ii) Pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$, $\widetilde{\zeta}(s) = \zeta(s)$.
(iii) En posant $I(s) = \pi^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$, on a $I(s) = I(1-s)$.

# Bibliographie


**Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels** **[AMR08]**

Mohammed El-Amrani. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels. Niveau M1*. Ellipses, 28 août 2008.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3908-14232-analyse-de-fourier-dans-les-espaces-fonctionnels-niveau-m1-9782729839031.html.

**Mathématiques pour l'agrégation** **[DAN]**

Jean-François Dantzer. *Mathématiques pour l'agrégation. Analyse et probabilités*. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.
https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332904-mathematiques-pour-l-agregation-analyse-et-probabilites.

**Leçons pour l'agrégation de mathématiques** **[D-L]**

Maximilien Dreveton et Joachim Lhabouz. *Leçons pour l'agrégation de mathématiques. Préparation à l'oral*. Ellipses, 28 mai 2019.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3543-13866-lecons-pour-lagregation-de-mathematiques-preparation-a-loral-9782340030183.html.

**De l'intégration aux probabilités** **[G-K]**

Olivier Garet et Aline Kurtzmann. *De l'intégration aux probabilités*. 2e éd. Ellipses, 28 mai 2019.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/4593-14919-de-l-integration-aux-probabilites-2e-edition-augmentee-9782340030206.html.

**Les maths en tête** **[GOU20]**

Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Analyse*. 3e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html.

**Analyse complexe et applications** **[QUE]**

Martine Queffélec et Hervé Queffélec. *Analyse complexe et applications. Nouveau tirage*. Calvage & Mounet, 13 mai 2017.
http://www.calvage-et-mounet.fr/2022/05/09/analyse-complexe-et-applications/.

**Formulaire de maths** **[R-R]**

Olivier Rodot et Jean-Étienne Rombaldi. *Formulaire de maths. Avec résumés de cours*. De Boeck Supérieur, 30 août 2022.
https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807339880-formulaire-de-maths.

**Éléments d'analyse réelle** **[ROM19-1]**

Jean-Étienne ROMBALDI. *Éléments d'analyse réelle.* 2e éd. EDP Sciences, 6 juin 2019.
https://laboutique.edpsciences.fr/produit/1082/9782759823789/elements-d-analyse-reelle.

**Mathématiques pour l'agrégation** **[ROM21]**

Jean-Étienne ROMBALDI. *Mathématiques pour l'agrégation. Algèbre et géométrie.* 2e éd. De Boeck Supérieur, 20 avr. 2021.
https://www.deboecksuperieur.com/ouvrage/9782807332201-mathematiques-pour-l-agregation-algebre-et-geometrie.

**Analyse pour l'agrégation** **[Z-Q]**

Claude ZUILY et Hervé QUEFFÉLEC. *Analyse pour l'agrégation. Agrégation/Master Mathématiques.* 5e éd. Dunod, 26 août 2020.
https://www.dunod.com/prepas-concours/analyse-pour-agregation-agregationmaster-mathematiques.