245 Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applcations.

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$.

I - Dérivabilité au sens complexe

[QUE] p. 76

Définition 1. On dit que f est **holomorphe** en $a \in \Omega$ s'il existe un complexe $f'(a)$ tel que

$$f'(a) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

On dit que f est holomorphe sur Ω si elle l'est en tout point de Ω et on note f' la fonction $f' : z \mapsto f'(z)$ ainsi que $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.

Exemple 2.
— $z \mapsto z^2$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, de dérivée $z \mapsto 2z$.
— $z \mapsto \overline{z}$ n'est holomorphe en aucun point de $\mathbb{C}$.

Proposition 3. (i) $\mathcal{H}(\Omega)$ est une algèbre sur $\mathbb{C}$ avec pour tout $g, h \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$:
— $(g+h)' = g' + h'$.
— $(\lambda g)' = \lambda g'$.
— $(gh)' = g'h + gh'$.
— $\left(\frac{g}{h}\right)' = \frac{g'h - gh'}{g^2}$ quand g ne s'annule pas sur Ω.

(ii) Pour tout $g \in \mathcal{H}(\Omega)$, $h \in \mathcal{H}(\Omega_1)$ où $g(\Omega) \subseteq \Omega_1$

$$h \circ g \in \mathcal{H}(\Omega) \text{ et } (h \circ g)' = (h' \circ g)g'$$

(iii) Soit $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ holomorphe bijective d'inverse h. On suppose h continue en $b = g(a)$ et $g'(a) \neq 0$. Alors h est holomorphe en b et

$$h'(b) = \frac{1}{g'(a)}$$

[BMP] p. 57

Théorème 4 (Conditions de Cauchy-Riemann)**.** On pose $u = \mathrm{Re}(f)$ et $v = \mathrm{Im}(f)$. On suppose f $\mathbb{R}$-différentiable en $a \in \Omega$. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est holomorphe en a.

(ii) $\mathrm{d}f_a$ est $\mathbb{C}$-linéaire.

(iii) $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = i\frac{\partial f}{\partial x}(a)$.

(iv) $\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a)$ et $\frac{\partial u}{\partial y}(a) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a)$.

Exemple 5. $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ et $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$ ne sont holomorphes en aucun point de $\mathbb{C}$. **[QUE]** p. 115

Théorème 6 (Weierstrass)**.** Une suite de fonctions holomorphes qui converge uniformément sur tout compact de Ω a une limite holomorphe sur Ω. De plus, la suite des dérivées k-ième converge uniformément sur tout compact vers la dérivée k-ième de la limite pour tout $k \in \mathbb{N}$. **[BMP]** p. 69

II - Séries entières et analycité

1. Généralités sur les séries entières

Définition 7. On appelle **série entière** toute série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$ où z est une variable complexe et où (a_n) est une suite complexe. **[GOU20]** p. 247

Lemme 8 (Abel)**.** Soient $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ tels que $(a_n z_0^n)$ soit bornée. Alors :

(i) $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, $\sum a_n z^n$ converge absolument.

(ii) $\forall r \in]0, z_0[$, $\sum a_n z^n$ converge normalement dans $\overline{D}(0,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$.

Définition 9. En reprenant les notations précédentes, le nombre

$$R = \sup\{r \geq 0 \mid (|a_n| r^n) \text{ est bornée}\}$$

est le **rayon de convergence** de $\sum a_n z^n$.

Exemple 10. p. 255

— $\sum n^2 z^n$ a un rayon de convergence égal à 1.

— $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini. On note $z \mapsto e^z$ la fonction somme.

Proposition 11. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $r \neq 0$. Alors $S \in \mathscr{H}(D(0,r))$ et, **[QUE]** p. 57

$$S'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$$

pour tout $z \in D(0,r)$.

Plus précisément, pour tout $k \in \mathbb{N}$, S est k fois dérivable avec

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n z^{n-k}$$

2. Analycité

Définition 12. On dit que f est **analytique** sur Ω si, pour tout $a \in \Omega$, il existe $r > 0$ et une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $\geq r$, tels que [QUE] p. 77

$$D(a,r) \subseteq \Omega \text{ et } \forall z \in D(a,r), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

ie. f est développable en série entière en tout point de Ω. On note $\mathscr{A}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur Ω.

Proposition 13. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $r \neq 0$. Alors $S \in \mathscr{A}(D(0,r))$ et, si $|z-a| \leq r - |a|$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{S^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k$$

(où $S^{(k)}$ désigne la k-ième dérivée complexe de S, voir la section suivante).

Proposition 14. $\mathscr{A}(\Omega) \subseteq \mathscr{H}(\Omega)$. p. 85

Proposition 15. Si $f = P/Q$ est une fraction rationnelle, alors f est développable en série entière au voisinage de chaque point qui n'est pas un pôle de f (cf. Définition 40). p. 77

Théorème 16 (Zéros isolés)**.** On suppose Ω connexe et $f \in \mathscr{A}(\Omega)$. Si f n'est pas identiquement nulle sur Ω, alors l'ensemble des zéros de f n'admet pas de point d'accumulation dans Ω. [BMP] p. 53

Corollaire 17. $\mathscr{A}(\Omega)$ est une algèbre intègre. p. 73

Remarque 18 (Prolongement analytique). Reformulé de manière équivalente au Théorème 16, si deux fonctions analytiques coïncident sur un sous-ensemble de Ω qui possède un point d'accumulation dans Ω, alors elles sont égales sur Ω. p. 53

Exemple 19. Il existe une unique fonction g holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que p. 77

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

et c'est la fonction identité.

Contre-exemple 20. Il existe au moins deux fonctions g holomorphes sur $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$ telles que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, g\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

III - Holomorphie et intégration

1. Intégration sur une courbe

Définition 21. — Un **chemin** est une application $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ (où $[a,b]$ est un segment de $\mathbb{R}$) continue. [QUE] p. 85

— Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, on dit que γ est **fermé**.

— Si γ est un chemin $\mathscr{C}^1$ par morceaux, on dit que γ est une **courbe**.

— On appelle $\gamma^* = \gamma([a,b])$ l'**image** de γ.

Exemple 22. Soient $\omega \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_*^+$. Alors,
$$\gamma : \begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \omega + re^{it} \end{array}$$
est une courbe fermée (c'est la paramétrisation du cercle de centre ω et de rayon r).

Définition 23. Soit $\gamma : [a,b] \to \Omega$ une courbe. L'**intégrale curviligne** le long de γ est
$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_b^a f(\gamma(t))\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

Proposition 24. Soit $\gamma : [a,b] \to \Omega$ une courbe de longueur $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$, alors,
$$\left| \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \right| \leq \sup_{z \in \gamma^*} |f(z)| \times L(\gamma)$$

Proposition 25. Soit $\gamma : [a,b] \to \Omega$ une courbe. On suppose $\gamma^* \subseteq \Omega$, f holomorphe sur Ω telle que f' est continue sur γ^*. Alors,
$$\int_\gamma f'(z)\,\mathrm{d}z = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

2. Théorie de Cauchy et lien avec l'analycité

Définition 26. Soit $\gamma : [a,b] \to \Omega$ une courbe telle que $\omega \notin \gamma^*$. **L'indice** de ω par rapport à γ, noté $I(\omega,\gamma)$, est défini par

$$I(\omega,\gamma) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2i\pi}\int_b^a \frac{1}{\gamma(t)-a}\gamma'(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque 27. En reprenant les notations précédentes, $I(\omega,\gamma)$ compte le nombre de tours orientés que γ fait autour de ω. En particulier :

(i) On a toujours $I(\omega,\gamma) \in \mathbb{Z}$.

(ii) On note $\gamma^* = \gamma([a,b])$ l'image de γ. $I(\omega,\gamma)$ est nulle sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

Théorème 28 (Cauchy homologique)**.** Soit Γ un cycle homologue à zéro dans Ω (ie. tel que $z \notin \Omega \implies I(a,\Gamma) = 0$). On suppose $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Alors, p. 134

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Corollaire 29 (Formule intégrale de Cauchy)**.** Soit Γ un cycle homologue à zéro dans Ω. On suppose $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Alors,

$$z_0 \in \Omega \setminus \Gamma^* \implies \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = I(z_0,\gamma)f(z_0)$$

Corollaire 30. On a $\mathscr{H}(\Omega) \subseteq \mathscr{A}(\Omega)$. De plus, si $a \in \Omega$ et que l'on pose $d = d(a, \mathbb{C} \setminus \Omega)$, on a p. 85

$$f(a+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n h^n \text{ pour } |h| < d \text{ avec } a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2i\pi}\int_{C^+(a,d)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}z$$

[BMP] p. 64

3. Conséquences

Proposition 31 (Inégalités de Cauchy)**.** On suppose f holomorphe au voisinage du disque $\overline{D}(a,R)$. On note c_n les coefficients du développement en série entière de f en a. Alors, [QUE] p. 102

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in [0,R], |c_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$$

où $M(r) = \sup_{|z-a|=r} |f(z)|$.

Corollaire 32 (Théorème de Liouville)**.** On suppose f holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier. Si f est bornée, alors f est constante.

p. 107

Théorème 33 (Principe du maximum)**.** On suppose Ω borné et f holomorphe dans Ω et continue dans $\overline{\Omega}$. On note M le sup de f sur la frontière (compacte) de Ω. Alors,

$$\forall z \in \Omega, |f(z)| \leq M$$

4. Holomorphie d'une intégrale à paramètre

p. 101

Théorème 34 (Holomorphie sous le signe intégral)**.** On suppose :

(i) $\forall z \in \Omega$, $x \mapsto f(z,x) \in L_1(X)$.

(ii) pp. en $x \in X$, $z \mapsto f(z,x)$ est holomorphe dans Ω. On notera $\frac{\partial f}{\partial z}$ cette dérivée définie presque partout.

(iii) $\forall K \subseteq \Omega$ compact, $\exists g_K \in L_1(X)$ positive telle que

$$|f(x,z)| \leq g_K(x) \quad \forall z \in K, \text{pp. en } x$$

Alors F est holomorphe dans Ω avec

$$\forall z \in \Omega, F'(z) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(z,t) \, \mathrm{d}\mu(z)$$

p. 115

Application 35. Soit $f \in L_1(\mathbb{R})$ ainsi que sa transformée de Fourier $\widehat{f} : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ixt} \, \mathrm{d}t$. Alors $f = 0$.

[BMP]
p. 83

Application 36. $F : z \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{zx} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$ définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ qui coïncide avec la transformée de Fourier de $f : x \mapsto e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$. On trouve en particulier,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \widehat{f}(t) = F(it) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{t^2}{4}}$$

p. 110

Notation 37. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\rho : I \to \mathbb{R}$ une fonction poids. On note :

— $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_n : x \mapsto x^n$.

— $L_2(I, \rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue.

p. 140

Lemme 38. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_n \in L_1(I, \rho)$ et on considère (P_n) la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ sur I. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_n \in L_2(I, \rho)$. En particulier, l'algorithme de Gram-Schmidt a bien du sens et (P_n) est bien définie.

[DEV]

Application 39. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. On considère (P_n) la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ sur I.

On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que

$$\int_I e^{a|x|} \rho(x) \, \mathrm{d}x < +\infty$$

alors (P_n) est une base hilbertienne de $L_2(I, \rho)$ pour la norme $\|.\|_2$.

IV - Méromorphie

1. Singularités

[QUE] p. 165

Définition 40. Soit $a \in \Omega$. On suppose $f \in \mathscr{H}(\Omega \setminus \{a\})$.

- On dit que a est une **singularité effaçable** pour f s'il existe $g \in \mathscr{H}(\Omega)$ tel que $f(z) = g(z)$ pour tout $z \in \Omega \setminus \{a\}$.
- On dit que a est un **pôle** d'ordre m s'il existe des scalaires $c_{-1}, \dots, c_{-m}$ avec $c_{-m} \neq 0$ tels que $z \mapsto f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_{-k}}{(z-a)^k}$ ait une singularité effaçable en a.
- $\sum_{k=1}^{m} \frac{c_{-k}}{(z-a)^k}$ est la **partie principale** de f en a et c_{-1} est le **résidu** de f en a noté $\operatorname{Res}(f, a)$.

Exemple 41.
- $z \mapsto \frac{\sin(z)}{z}$ a une singularité effaçable en 0.
- $z \mapsto \frac{e^z}{z}$ a un pôle d'ordre 1 (simple) en 0 avec partie principale égale à $\frac{1}{z}$ et $\operatorname{Res}(f, 0) = 1$.

Définition 42. On dit que f est **méromorphe** sur Ω s'il existe $A \subseteq \Omega$ tel que :

- A n'a que des points isolés dans Ω (en particulier, A est au plus dénombrable et $\Omega \setminus A$ est ouvert).
- $f \in \mathscr{H}(\Omega \setminus A)$.
- f a un pôle en chaque point de a.

Exemple 43. $z \mapsto \frac{1}{\sin(z)}$ est méromorphe dans $\mathbb{C}$ et en reprenant les notations précédentes, $A = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

[BMP] p. 82

Exemple 44. La fonction Γ définie par

$$\Gamma : \begin{array}{ccc} \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} \, \mathrm{d}t \end{array}$$

se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$.

Proposition 45. On suppose $f = \frac{g}{h}$ où g et h sont holomorphes en un voisinage de $a \in \Omega$ avec a un zéro simple de h et $g(a) \neq 0$. Alors, a est un pôle simple de f de résidu [QUE] p. 168

$$\mathrm{Res}(f, a) = \frac{g(a)}{h'(a)}$$

Exemple 46. Le résidu de $z \mapsto \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}$ en 1 est égal à $\frac{3}{4}$.

2. Théorème des résidus

Théorème 47 (des résidus)**.** On suppose f méromorphe sur Ω et on note A l'ensemble de ses pôles. Soit γ une courbe homologue à zéro dans Ω et ne rencontrant pas A. Alors,

$$\int_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z = 2i\pi \sum_{a \in A} I(a, \gamma) \mathrm{Res}(f, a)$$

Exemple 48. p. 173

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 + 2\cos(t)} \, \mathrm{d}t = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}$$

Exemple 49 (Intégrale de Dirichlet)**.**

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

[DEV] **Exemple 50** (Transformée de Fourier d'une gaussienne)**.** On définit $\forall a \in \mathbb{R}_*^+$, [AMR08] p. 156

$$\gamma_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-ax^2} \end{array}$$

Alors,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{\gamma_a}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{-\xi^2}{4a}}$$

[QUE] p. 171

Application 51 (Théorème de Kronecker)**.** On suppose f holomorphe sur Ω et non identiquement nulle dans Ω. Soit γ une courbe homologue à zéro dans Ω et qui ne rencontre pas l'ensemble des zéros de f. Alors, le nombre $Z = Z(f)$ des zéros de f à l'intérieur de γ comptés avec multiplicités vérifie

$$Z = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z$$

Application 52 (Théorème de Rouché)**.** Soient γ un cycle homologue à zéro dans Ω et $g, h \in \mathscr{H}(\Omega)$. On suppose

$$z \in \gamma^* \implies |g(z)| \leq |f(z)|$$

Alors,

$$Z(g) = Z(g+h)$$

Exemple 53. $z \mapsto z^8 - 5z^3 + z - 2$ a trois zéros dans $D(0,1)$. [BMP] p. 67

Bibliographie

Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels **[AMR08]**

Mohammed El-Amrani. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels. Niveau M1*. Ellipses, 28 août 2008.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3908-14232-analyse-de-fourier-dans-les-espaces-fonctionnels-niveau-m1-9782729839031.html.

Objectif agrégation **[BMP]**

Vincent Beck, Jérome Malick et Gabriel Peyré. *Objectif agrégation*. 2e éd. H&K, 22 août 2005.
https://objectifagregation.github.io.

Les maths en tête **[GOU20]**

Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Analyse*. 3e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html.

Analyse complexe et applications **[QUE]**

Martine Queffélec et Hervé Queffélec. *Analyse complexe et applications. Nouveau tirage*. Calvage & Mounet, 13 mai 2017.
http://www.calvage-et-mounet.fr/2022/05/09/analyse-complexe-et-applications/.