250 Transformation de Fourier. Applications.

I - Transformation de Fourier dans $L_1(\mathbb{R}^d)$

1. Définitions et premières propriétés

[AMR08] p. 109

Définition 1. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable. On définit, lorsque cela a un sens, sa **transformée de Fourier**, notée $\widehat{f}$ par

$$\widehat{f} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{C} \\ \xi & \mapsto & \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} \, \mathrm{d}x \end{array}$$

Exemple 2 (Densité de Poisson)**.** On pose $\forall x \in \mathbb{R}$, $p(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$. Alors $p \in L_1(\mathbb{R})$ et, $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{p}(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}$.

p. 156

Exemple 3 (Transformée de Fourier d'une gaussienne)**.** On définit $\forall a \in \mathbb{R}^+_*$,

$$\gamma_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-ax^2} \end{array}$$

Alors,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{\gamma_a}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{-\xi^2}{4a}}$$

p. 109

Lemme 4 (Riemann-Lebesgue)**.** Soit $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$, $\widehat{f}$ existe et

$$\lim_{\|\xi\| \to +\infty} \widehat{f}(\xi)$$

Remarque 5. La transformée de Fourier d'une fonction intégrable n'est pas forcément intégrable.

Théorème 6. $\forall f \in L_1(\mathbb{R}^d)$, $\widehat{f}$ est continue, bornée par $\|f\|_1$. Donc la **transformation de Fourier**

$$\mathscr{F} : \begin{array}{ccc} L_1(\mathbb{R}^d) & \to & \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d) \\ f & \mapsto & \widehat{f} \end{array}$$

est bien définie.

Corollaire 7. La transformation de Fourier $\mathscr{F} : L_1(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d)$ est une application linéaire continue.

Proposition 8. Soit $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Alors :

(i) $(\mathscr{F}(x \mapsto f(-x))) = (\xi \mapsto \mathscr{F}(f)(-\xi))$.

(ii) $(\mathscr{F}(\overline{f})) = (\xi \mapsto \overline{\mathscr{F}(f)(-\xi)})$.

(iii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_*$, et $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$(\mathscr{F}(x \mapsto f(\lambda x))) = (\frac{1}{|\lambda|^d}\mathscr{F}(f)\left(\frac{\xi}{\lambda}\right))$$

(iv) Pour tout $a \in \mathbb{R}^d$,

$$(\mathscr{F}(x \mapsto f(x-a))) = (e^{-i\langle a,\xi\rangle}\mathscr{F}(f)) \text{ et } (\mathscr{F}(x \mapsto e^{-i\langle a,\xi\rangle}f(x))) = (\xi \mapsto \mathscr{F}(f)(\xi - a))$$

Proposition 9. Soit $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$. p. 120

(i) On suppose $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^d)$ et $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Alors,

$$\forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d, \ \widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = i\xi_j \xi \widehat{f}(\xi)$$

(ii) On suppose $y_j f \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Alors, la j-ième dérivée partielle de $\widehat{f}$ existe, et,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \ \frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_j}(\xi) = -i\widehat{(y_j f)}(\xi)$$

Application 10. On considère $f : x \mapsto e^{-\alpha x^2}$ pour $\alpha > 0$. Alors, f vérifie [GOU20] p. 169

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{i\xi} f(\xi)$$

ce qui permet de retrouver l'Exemple 3.

2. Convolution

Définition 11. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. On dit que **la convolée** (ou **le** [AMR08] p. 75

produit de convolution) de f et g en $x \in \mathbb{R}$ **existe** si la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & f(x-t)g(t) \end{array}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^d$ pour la mesure de Lebesgue. On pose alors :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple 12. Soient $a < b \in \mathbb{R}_*^+$. Alors $\mathbb{1}_{[-a,a]} * \mathbb{1}_{[-b,b]}$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ et

$$\left(\mathbb{1}_{[-a,a]} * \mathbb{1}_{[-b,b]}\right)(x) = \begin{cases} 2a & \text{si } 0 \leq |x| \leq b-a \\ b+a-|x| & \text{si } b-a \leq |x| \leq b+a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 13. Dans $L_1(\mathbb{R}^d)$, dès qu'il a un sens, le produit de convolution de deux fonctions est commutatif, bilinéaire et associatif.

Théorème 14 (Convolution dans $L_1(\mathbb{R}^d)$)**.** Soient $f, g \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Alors :

(i) pp. en $x \in \mathbb{R}^d$, $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$.

(ii) $f * g$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$.

(iii) $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

(iv) L'espace vectoriel normé $(L_1(\mathbb{R}^d), \|.\|_1)$ muni de $*$ est une algèbre de Banach commutative.

Proposition 15. p. 114

$$\forall f, g \in L_1(\mathbb{R}^d), \widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$$

ie. $\mathscr{F} : (L_1(\mathbb{R}^d), +, *, \cdot) \to (\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d), +, \times, \cdot)$ est un morphisme d'algèbres.

Corollaire 16. L'algèbre $(L_1(\mathbb{R}^d), +, *, \cdot)$ n'a pas d'élément unité.

Application 17.

$$f * f = f \iff f = 0$$

Théorème 18 (Formule de dualité)**.**

$$\forall f, g \in L_1(\mathbb{R}^d), \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\widehat{g}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

3. Inversion

Théorème 19 (Formule d'inversion de Fourier)**.** Si $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ est telle que $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\widehat{\widehat{f}}(x) = (2\pi)^d f(x) \text{ pp. en } x \in \mathbb{R}^d$$

Exemple 20. Une solution de l'équation intégrale d'inconnue y :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{y(t)}{(x-t)^2 + a^2} = \frac{1}{x^2 + b^2}$$

est $x \mapsto \frac{a(b-a)}{b\pi(x^2+(b-a)^2)}$ pour $0 < a < b$.

Corollaire 21. La transformation de Fourier $\mathscr{F} : L_1(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d)$ est une application injective.

Proposition 22. Soient $g \in L_1(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\widehat{fg} = \frac{1}{(2\pi)^d} \widehat{f} * \widehat{g}$$

II - Transformation de Fourier dans d'autres espaces

1. Dans $L_2(\mathbb{R}^d)$

Théorème 23 (Plancherel-Parseval)**.** p. 122

$$\forall f \in L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d),\ \|\widehat{f}\|_2^2 = (2\pi)^d \|f\|_2^2$$

Remarque 24. En termes de produit scalaire, la formule précédente s'écrit

$$\forall f, g \in L_2(\mathbb{R}^d), \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\,\mathrm{d}\xi = (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$$

Théorème 25. Soit $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Alors :

(i) Il existe une suite (f_n) de $L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers f dans $L_2(\mathbb{R}^d)$.

(ii) Pour une telle suite (f_n), la suite $(\widehat{f_n})$ converge dans $L_2(\mathbb{R}^d)$ vers une limite $\tilde{f}$ indépendante de la suite choisie.

Définition 26. La limite $\tilde{f}$ est la **transformée de Fourier** de f dans $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 27. Les transformations de Fourier $L_1(\mathbb{R}^d)$ et $L_2(\mathbb{R}^d)$ coïncident sur $L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d)$.

Remarque 28. On a prolongé $\mathscr{F}$ à $L_2(\mathbb{R}^d)$, mais il faut prendre garde au fait que $\mathscr{F}$ désigne deux applications distinctes : $\mathscr{F} : L_1(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^d)$ et $\mathscr{F} : L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, ces deux applications ne coïncidant que sur $L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 29. Soit $f \in L_2(\mathbb{R})$. On a les relations suivantes :

$$\lim_{A \to +\infty} \|\varphi_A - f\|_2 = 0 \text{ et } \lim_{A \to +\infty} \|\psi_A - f\|_2 = 0$$

où

$$\varphi_A(\xi) = \int_{-A}^{A} f(x) e^{-ix\xi} \, \mathrm{d}x \text{ et } \psi_A(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} \hat{f}(\xi) e^{-ix\xi} \, \mathrm{d}\xi$$

Corollaire 30. Lorsque $f \in L_2(\mathbb{R})$ et $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R})$, on a

$$\text{pp. en } x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi) e^{-ix\xi} \, \mathrm{d}\xi$$

Théorème 31 (Formule d'inversion de Fourier-Plancherel)**. L'opérateur de Fourier-Plancherel**

$$\mathscr{P} : \begin{array}{ccc} L_2(\mathbb{R}^d) & \to & L_2(\mathbb{R}^d) \\ f & \mapsto & \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^d} \mathscr{F}(f) \end{array}$$

est un automorphisme d'inverse $\mathscr{P}^{-1} = \overline{\mathscr{P}}$.

Exemple 32. On pose $f = \mathbb{1}_{[-a,a]}$ et on a $\forall \xi \neq 0, \hat{f}(\xi) = \frac{2\sin(a\xi)}{\xi}$. Or, $\hat{f} \in L_2(\mathbb{R}) \setminus L_1(\mathbb{R})$. On peut calculer sa transformée de Fourier dans $L_2(\mathbb{R})$: [D-L] p. 451

$$\forall x \in \mathbb{R}, \hat{\hat{f}}(x) = (\widehat{\hat{f}})(x) = f(-x) = \mathbb{1}_{[-a,a]}(x)$$

2. Dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$

[AMR08] p. 133

Définition 33. Une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ est dite **à décroissance rapide** si

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \lim_{\|x\| \to +\infty} |x^\alpha f(x)| = 0$$

où $(x_1, \dots, x_d)^{(\alpha_1, \dots, \alpha_d)} = x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}$.

Exemple 34. $x \mapsto e^{-|x|}$ est à décroissance rapide sur $\mathbb{R}$.

Définition 35. On appelle **classe de Schwartz**, noté $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, l'espaces des fonctions de $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ telles que :
- $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$.
- f est à décroissance rapide ainsi que toutes ses dérivées.

Proposition 36. $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est un espace vectoriel stable par dérivation, par multiplication par un polynôme, par produit, par conjugaison et par translation.

Théorème 37. (i) $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \subseteq L_1(\mathbb{R}^d)$.
(ii) $\mathscr{F}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)) \subseteq \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 38. $\mathscr{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ est un automorphisme bicontinu de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ dont l'inverse est donné par

$$\mathscr{F}^{-1} = \frac{1}{(2\pi)^d} \overline{F}$$

III - Applications

1. Séries de fonctions

[DEV]

[GOU20] p. 284

Théorème 39 (Formule sommatoire de Poisson)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $f'(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ quand $|x| \longrightarrow +\infty$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2\pi n) e^{2i\pi nx}$$

Application 40 (Identité de Jacobi)**.**

$$\forall s > 0, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{s}}$$

2. Bases hilbertiennes

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_n : x \mapsto x^n$. **[BMP]** p. 110

Définition 41. On appelle **fonction poids** une fonction $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable, positive et telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \rho g_n \in L_1(I)$.

Soit $\rho : I \to \mathbb{R}$ une fonction poids.

Notation 42. On note $L_2(I,\rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Proposition 43. Muni de

$$\langle .,. \rangle : (f,g) \mapsto \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)\,\mathrm{d}x$$

$L_2(I,\rho)$ est un espace de Hilbert.

Théorème 44. Il existe une unique famille (P_n) de polynômes unitaires orthogonaux deux-à-deux telle que $\deg(P_n) = n$ pour tout entier n. C'est la famille de **polynômes orthogonaux** associée à ρ sur I.

Exemple 45 (Polynômes de Hermite)**.** Si $\forall x \in I$, $\rho(x) = e^{-x^2}$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{\partial}{\partial x^n}\left(e^{-x^2}\right)$$

Lemme 46. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_n \in L_1(I,\rho)$ et on considère (P_n) la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ sur I. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_n \in L_2(I,\rho)$. En particulier, l'algorithme de Gram-Schmidt a bien du sens et (P_n) est bien définie. p. 140

[DEV] **Application 47.** On considère (P_n) la famille des polynômes orthogonaux associée à ρ sur I et on suppose qu'il existe $a > 0$ tel que

$$\int_I e^{a|x|}\rho(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$$

alors (P_n) est une base hilbertienne de $L_2(I,\rho)$ pour la norme $\|.\|_2$.

Contre-exemple 48. On considère, sur $I = \mathbb{R}_*^+$, la fonction poids $\rho : x \mapsto x^{-\ln(x)}$. Alors, la famille des g_n n'est pas totale. La famille des polynômes orthogonaux associée à ce poids particulier n'est donc pas totale non plus : ce n'est pas une base hilbertienne.

3. En probabilités

Soit $X : (\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$ un vecteur aléatoire.

[G-K] p. 239

Définition 49. On appelle **fonction caractéristique** de X, notée ϕ_X, la transformée de Fourier de la loi $\mathbb{P}_X$ (définie à un signe près) :

$$\phi_X : t \mapsto \mathbb{E}(e^{i\langle t,x\rangle})$$

p. 165

Remarque 50. Si X est un vecteur aléatoire réel admettant f pour densité, alors

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \phi_X(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t,x\rangle} f(x) \, d\mathbb{P}(x)$$

p. 239

Théorème 51. Soient X et Y deux vecteurs aléatoires réels. Alors,

$$\phi_X = \phi_Y \iff \mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$$

Exemple 52.

— $X \sim \mathscr{U}([-1,1]) \iff \forall t \in \mathbb{R}, \phi_X(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

— $X \sim \mathscr{E}(\lambda) \iff \forall t \in \mathbb{R}, \phi_X(t) = \frac{1}{1-it}$.

— $X(\Omega) \subseteq \mathbb{N} \implies \forall t \in \mathbb{R}, \phi_X(t) = G_X(e^{it})$ où G_X est la fonction génératrice de X.

Théorème 53. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, alors dans pour une variable aléatoire réelle,

$$\mathbb{E}(|X|^N) < +\infty \implies \phi_X \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R})$$

Corollaire 54. On se place dans le cadre du théorème précédent. On a :

$$\forall k \in [\![0, N]\!], \phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}(X^k)$$

Théorème 55. Si X et Y sont deux vecteurs aléatoires réels indépendants :

(i) $\phi_{X+Y} = \phi_X \phi_Y$.

(ii) $\forall s, t \in \mathbb{R}^d, \phi_{(X,Y)}(s,t) = \phi_X(s)\phi_Y(t)$.

Bibliographie

Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels **[AMR08]**

Mohammed El-Amrani. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels. Niveau M1*. Ellipses, 28 août 2008.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3908-14232-analyse-de-fourier-dans-les-espaces-fonctionnels-niveau-m1-9782729839031.html.

Objectif agrégation **[BMP]**

Vincent Beck, Jérome Malick et Gabriel Peyré. *Objectif agrégation*. 2e éd. H&K, 22 août 2005.
https://objectifagregation.github.io.

Leçons pour l'agrégation de mathématiques **[D-L]**

Maximilien Dreveton et Joachim Lhabouz. *Leçons pour l'agrégation de mathématiques. Préparation à l'oral*. Ellipses, 28 mai 2019.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/3543-13866-lecons-pour-lagregation-de-mathematiques-preparation-a-loral-9782340030183.html.

De l'intégration aux probabilités **[G-K]**

Olivier Garet et Aline Kurtzmann. *De l'intégration aux probabilités*. 2e éd. Ellipses, 28 mai 2019.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/4593-14919-de-l-integration-aux-probabilites-2e-edition-augmentee-9782340030206.html.

Les maths en tête **[GOU20]**

Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Analyse*. 3e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.
https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html.