

253 Utilisation de la notion de convexité en analyse.

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

I - Convexité d'une fonction, d'un ensemble

1. Ensembles convexes

a. Généralités

Définition 1. — Soient $a, b \in E$. On appelle **segment** d'extrémités a et b , l'ensemble

$$[a, b] = \{ta + (1 - t)b \mid t \in [0, 1]\}$$

— On dit qu'une partie C de E est **convexe** si

$$\forall a, b \in E, [a, b] \subseteq E$$

[GOU21]
p. 51

Exemple 2. Un sous-espace vectoriel de E est convexe.

Remarque 3. Une partie convexe est connexe.

Proposition 4. (i) Dans \mathbb{R} , les intervalles sont à la fois les parties connexes et convexes.

(ii) Une intersection de parties convexes est convexe.

[BMP]
p. 26

b. Enveloppes convexes

Définition 5. Soit $A \subseteq E$. On appelle **enveloppe convexe** de A le plus petit (au sens de l'inclusion) convexe contenant A . On la note $\text{Conv}(A)$.

[GOU21]
p. 51

Proposition 6. Soit $A \subseteq E$. Alors,

$$x \in \text{Conv}(A) \iff x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \text{ avec } x_1, \dots, x_n \in A \text{ et } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+ \text{ tels que } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

Théorème 7 (Carathéodory). Soit $A \subseteq E$. On suppose que E est un espace vectoriel normé de dimension finie n . Alors, tout élément de $\text{Conv}(A)$ est combinaison convexe de $n + 1$ éléments de A .

p. 54

Application 8. Soit $A \subseteq E$ compact. On suppose que E est un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors $\text{Conv}(A)$ est compact.

Proposition 9. On suppose que E est un espace vectoriel normé. Alors, pour toute partie convexe C de E , \overline{C} et $\overset{\circ}{C}$ sont convexes.

Théorème 10 (Hahn-Banach géométrique). On se place dans le cas où E est un espace de Hilbert sur \mathbb{R} . Soit C une partie de E convexe compacte. Alors, si $x \notin C$, il existe $f \in E'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall y \in C, f(x) < \alpha < f(y)$$

[BMP]
p. 97

Corollaire 11. On se place dans le cas où E est un espace de Hilbert sur \mathbb{R} . Soit $A \subseteq E$. Alors,

$$x \in \overline{\text{Conv}(A)} \iff \forall f \in H', f(x) \leq \sup_{y \in A} f(y)$$

p. 133

2. Fonctions convexes

On munit E d'une norme $\|\cdot\|$. Soit I une partie convexe de E .

Définition 12. — Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est **convexe** si

$$\forall x, y \in I, \forall t \in [0, 1], f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

— Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est **concave** si $-f$ est convexe.

[ROM19-1]
p. 225

Remarque 13. Les définitions de f **strictement convexe** et f **strictement concave** s'obtiennent en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes dans la définition précédente.

Exemple 14. — $x \mapsto \|x\|$ est convexe sur E .

— \exp est convexe sur \mathbb{R} .

Proposition 15. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe dans $E \times \mathbb{R}$.

Théorème 16. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si $\forall x, y \in I, t \mapsto f((1-t)x + ty)$ est convexe sur $[0, 1]$.

Ce dernier théorème justifie que l'étude des fonctions convexes se ramène à l'étude des fonctions convexes sur un intervalle réel.

Proposition 17. — Une combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions convexes est convexe.

- La composée $\varphi \circ g$ d'une fonction convexe croissante $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ avec une fonction convexe $g : I \rightarrow J$ est croissante.
- Une limite simple d'une suite de fonctions convexes est convexe.

3. Fonctions log-convexes

Définition 18. On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ est **log-convexe** si $\ln \circ f$ est convexe sur I .

p. 228

Proposition 19. Une fonction log-convexe est convexe.

Contre-exemple 20. $x \mapsto x$ est convexe mais non log-convexe.

Théorème 21. Pour une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}_*^+$, les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est log-convexe.
- (ii) $\forall \alpha > 0, x \mapsto \alpha^x f(x)$ est convexe.
- (iii) $\forall x, y \in I, \forall t \in [0, 1], f((1-t)x + ty) \leq (f(x))^{1-t} (f(y))^t$.
- (iv) $\forall \alpha > 0, f^\alpha$ est convexe.

Lemme 22. La fonction Γ définie pour tout $x > 0$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ vérifie :

- (i) $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
- (ii) $\Gamma(1) = 1$.
- (iii) Γ est log-convexe sur \mathbb{R}_*^+ .

p. 364

[DEV]

Théorème 23 (Bohr-Mollerup). Soit $f : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant le Point (i), Point (ii) et Point (iii) du Lemme 22. Alors $f = \Gamma$.

Remarque 24. À la fin de la preuve, on obtient une formule due à Gauss :

$$\forall x \in]0, 1], \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{(x+n) \dots (x+1)x}$$

que l'on peut aisément étendre à \mathbb{R}_*^+ entier.

II - Inégalités de convexité

1. Inégalités pour des familles de réels

Proposition 25 (Inégalité de Hölder). Soient $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors,

[GOU20]
p. 97

$$\forall a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \geq 0, \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Proposition 26 (Inégalité de Minkowski). Soit $p \geq 1$. Alors,

$$\forall x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \geq 0, \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Proposition 27 (Comparaison des moyennes harmonique, géométrique et arithmétique). Pour toute suite finie $x = (x_i)$ de n réels strictement positifs, on a :

[ROM19-1]
p. 242

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \leq \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

2. Inégalités en théorie de l'intégration

Proposition 28 (Inégalité de Jensen). Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe, alors pour toute fonction u continue sur un intervalle $[a, b]$, on a :

$$f\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b u(t) dt\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \circ u(t) dt$$

Théorème 29 (Inégalité de Hölder). Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in \mathcal{L}_p$ et $g \in \mathcal{L}_q$. Alors $fg \in \mathcal{L}_1$ et

[G-K]
p. 209

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Remarque 30. C'est encore vrai pour $q = +\infty$ en convenant que $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Application 31. Dans un espace de mesure finie,

$$1 \leq p < q \leq +\infty \implies L_q \subseteq L_p$$

Théorème 32 (Inégalité de Minkowski).

$$\forall f, g \in \mathcal{L}_p, \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

III - Convexité et optimisation

1. Pour les fonctions convexes

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle réel non réduit à un point.

Proposition 33. Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est constante si et seulement si elle est convexe et majorée.

[ROM19-1]
p. 234

Contre-exemple 34. La fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par $f(x) = \frac{1}{1+x}$ est convexe, majorée, mais non constante.

Proposition 35. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe et est dérivable en un point $\alpha \in \overset{\circ}{I}$ tel que $f'(\alpha) = 0$, alors f admet un minimum global en α .

Proposition 36. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe et admet un minimum local, alors ce minimum est global.

2. Dans un espace de Hilbert

Pour toute la suite, on fixe H un espace de Hilbert de norme $\|\cdot\|$ et on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire associé.

[LI]
p. 32

Lemme 37 (Identité du parallélogramme).

$$\forall x, y \in H, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

et cette identité caractérise les normes issues d'un produit scalaire.

Théorème 38 (Projection sur un convexe fermé). Soit $C \subseteq H$ un convexe fermé non-vide.

[DEV]

Alors :

$$\forall x \in H, \exists ! y \in C \text{ tel que } d(x, C) = \inf_{z \in C} \|x - z\| = d(x, y)$$

On peut donc noter $y = P_C(x)$, le **projeté orthogonal de x sur C** . Il s'agit de l'unique point de C vérifiant

$$\forall z \in C, \langle x - P_C(x), z - P_C(x) \rangle \leq 0$$

Théorème 39. Si F est un sous espace vectoriel fermé dans H , alors P_F est une application linéaire continue. De plus, pour tout $x \in H$, $P_F(x)$ est l'unique point $y \in F$ tel que $x - y \in F^\perp$.

Théorème 40. Si F est un sous espace vectoriel fermé dans H , alors

$$H = F \oplus F^\perp$$

et P_F est la projection sur F parallèlement à F^\perp : c'est la **projection orthogonale** sur F .

Corollaire 41. Soit F un sous-espace vectoriel de H . Alors,

$$\overline{F} = H \iff F^\perp = 0$$

Théorème 42 (de représentation de Riesz).

$$\forall \varphi \in H', \exists ! y \in H, \text{ tel que } \forall x \in H, \varphi(x) = \langle x, y \rangle$$

et de plus, $\|\varphi\| = \|y\|$.

Corollaire 43.

$$\forall T \in H', \exists ! U \in H' \text{ tel que } \forall x, y \in H, \langle T(x), y \rangle = \langle x, U(y) \rangle$$

On note alors $U = T^*$: c'est l'**adjoint** de T . On a alors $\|T\| = \|T^*\|$.

Application 44. L'application

$$\varphi : \begin{array}{l} L_q \rightarrow (L_p)' \\ g \rightarrow (\varphi_g : f \mapsto \int_X f g \, d\mu) \end{array} \quad \text{où } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

est une isométrie linéaire surjective. C'est donc un isomorphisme isométrique.

Bibliographie

Objectif agrégation

[BMP]

Vincent BECK, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ. *Objectif agrégation*. 2^e éd. H&K, 22 août 2005.

<https://objectifagregation.github.io>.

De l'intégration aux probabilités

[G-K]

Olivier GARET et Aline KURTZMANN. *De l'intégration aux probabilités*. 2^e éd. Ellipses, 28 mai 2019.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/4593-14919-de-l-integration-aux-probabilites-2e-edition-augmentee-9782340030206.html>.

Les maths en tête

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3^e éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.

Les maths en tête

[GOU21]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités*. 3^e éd. Ellipses, 13 juill. 2021.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html>.

Cours d'analyse fonctionnelle

[LI]

Daniel LI. *Cours d'analyse fonctionnelle. avec 200 exercices corrigés*. Ellipses, 3 déc. 2013.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/6558-cours-danalyse-fonctionnelle-avec-200-exercices-corriges-9782729883058.html>.

Éléments d'analyse réelle

[ROM19-1]

Jean-Étienne ROMBALDI. *Éléments d'analyse réelle*. 2^e éd. EDP Sciences, 6 juin 2019.

<https://laboutique.edpsciences.fr/produit/1082/9782759823789/elements-d-analyse-reelle>.

Analyse pour l'agrégation

[Z-Q]

Claude ZUILY et Hervé QUEFFÉLEC. *Analyse pour l'agrégation. Agrégation/Master Mathématiques*. 5^e éd. Dunod, 26 août 2020.

<https://www.dunod.com/prepas-concours/analyse-pour-agregation-agregationmaster-mathematiques>.