

## 253 Utilisation de la notion de convexité en analyse.

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### I - Convexité d'une fonction, d'un ensemble

#### 1. Ensembles convexes

##### a. Généralités

**Définition 1.** — Soient  $a, b \in E$ . On appelle **segment** d'extrémités  $a$  et  $b$ , l'ensemble

$$[a, b] = \{ta + (1 - t)b \mid t \in [0, 1]\}$$

— On dit qu'une partie  $C$  de  $E$  est **convexe** si

$$\forall a, b \in E, [a, b] \subseteq E$$

[GOU21]  
p. 51

**Exemple 2.** Un sous-espace vectoriel de  $E$  est convexe.

*Remarque 3.* Une partie convexe est connexe.

**Proposition 4.** (i) Dans  $\mathbb{R}$ , les intervalles sont à la fois les parties connexes et convexes.

(ii) Une intersection de parties convexes est convexe.

[BMP]  
p. 26

##### b. Enveloppes convexes

**Définition 5.** Soit  $A \subseteq E$ . On appelle **enveloppe convexe** de  $A$  le plus petit (au sens de l'inclusion) convexe contenant  $A$ . On la note  $\text{Conv}(A)$ .

[GOU21]  
p. 51

**Proposition 6.** Soit  $A \subseteq E$ . Alors,

$$x \in \text{Conv}(A) \iff x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \text{ avec } x_1, \dots, x_n \in A \text{ et } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+ \text{ tels que } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

**Théorème 7** (Carathéodory). Soit  $A \subseteq E$ . On suppose que  $E$  est un espace vectoriel normé de dimension finie  $n$ . Alors, tout élément de  $\text{Conv}(A)$  est combinaison convexe de  $n + 1$  éléments de  $A$ .

p. 54

**Application 8.** Soit  $A \subseteq E$  compact. On suppose que  $E$  est un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors  $\text{Conv}(A)$  est compact.

**Proposition 9.** On suppose que  $E$  est un espace vectoriel normé. Alors, pour toute partie convexe  $C$  de  $E$ ,  $\overline{C}$  et  $\overset{\circ}{C}$  sont convexes.

**Théorème 10** (Hahn-Banach géométrique). On se place dans le cas où  $E$  est un espace de Hilbert sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $C$  une partie de  $E$  convexe compacte. Alors, si  $x \notin C$ , il existe  $f \in E'$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$  tels que

$$\forall y \in C, f(x) < \alpha < f(y)$$

[BMP]  
p. 97

**Corollaire 11.** On se place dans le cas où  $E$  est un espace de Hilbert sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $A \subseteq E$ . Alors,

$$x \in \overline{\text{Conv}(A)} \iff \forall f \in H', f(x) \leq \sup_{y \in A} f(y)$$

p. 133

## 2. Fonctions convexes

On munit  $E$  d'une norme  $\|\cdot\|$ . Soit  $I$  une partie convexe de  $E$ .

**Définition 12.** — Une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est **convexe** si

$$\forall x, y \in I, \forall t \in [0, 1], f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

— Une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est **concave** si  $-f$  est convexe.

[ROM19]  
p. 225

*Remarque 13.* Les définitions de  $f$  **strictement convexe** et  $f$  **strictement concave** s'obtiennent en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes dans la définition précédente.

**Exemple 14.** —  $x \mapsto \|x\|$  est convexe sur  $E$ .

—  $\exp$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .

**Proposition 15.** Une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe dans  $E \times \mathbb{R}$ .

**Théorème 16.** Une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe si et seulement si  $\forall x, y \in I, t \mapsto f((1-t)x + ty)$  est convexe sur  $[0, 1]$ .

Ce dernier théorème justifie que l'étude des fonctions convexes se ramène à l'étude des fonctions convexes sur un intervalle réel.

**Proposition 17.** — Une combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions convexes est convexe.

- La composée  $\varphi \circ g$  d'une fonction convexe croissante  $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$  avec une fonction convexe  $g : I \rightarrow J$  est croissante.
- Une limite simple d'une suite de fonctions convexes est convexe.

### 3. Fonctions log-convexes

**Définition 18.** On dit qu'une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}_*^+$  est **log-convexe** si  $\ln \circ f$  est convexe sur  $I$ .

p. 228

**Proposition 19.** Une fonction log-convexe est convexe.

**Contre-exemple 20.**  $x \mapsto x$  est convexe mais non log-convexe.

**Théorème 21.** Pour une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ , les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $f$  est log-convexe.
- (ii)  $\forall \alpha > 0, x \mapsto \alpha^x f(x)$  est convexe.
- (iii)  $\forall x, y \in I, \forall t \in [0, 1], f((1-t)x + ty) \leq (f(x))^{1-t} (f(y))^t$ .
- (iv)  $\forall \alpha > 0, f^\alpha$  est convexe.

**Lemme 22.** La fonction  $\Gamma$  définie pour tout  $x > 0$  par  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$  vérifie :

p. 364

- (i)  $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ .
- (ii)  $\Gamma(1) = 1$ .
- (iii)  $\Gamma$  est log-convexe sur  $\mathbb{R}_*^+$ .

**Théorème 23** (Bohr-Mollerup). Soit  $f : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifiant le Point (i), Point (ii) et Point (iii) du Lemme 22. Alors  $f = \Gamma$ .

[RUD]  
p. 94

*Remarque 24.* À la fin de la preuve, on obtient une formule due à Gauss :

$$\forall x \in ]0, 1], \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{(x+n) \dots (x+1)x}$$

[DEV]

que l'on peut aisément étendre à  $\mathbb{R}_*^+$  entier.

## II - Inégalités de convexité

### 1. Inégalités pour des familles de réels

**Proposition 25** (Inégalité de Hölder). Soient  $p, q > 0$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Alors,

[GOU20]  
p. 97

$$\forall a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \geq 0, \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

**Proposition 26** (Inégalité de Minkowski). Soit  $p \geq 1$ . Alors,

$$\forall x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \geq 0, \left( \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

**Proposition 27** (Comparaison des moyennes harmonique, géométrique et arithmétique). Pour toute suite finie  $x = (x_i)$  de  $n$  réels strictement positifs, on a :

[ROM19]  
p. 242

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \leq \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

### 2. Inégalités en théorie de l'intégration

**Proposition 28** (Inégalité de Jensen). Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe, alors pour toute fonction  $u$  continue sur un intervalle  $[a, b]$ , on a :

$$f\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b u(t) dt\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f \circ u(t) dt$$

**Théorème 29** (Inégalité de Hölder). Soient  $p, q \in ]1, +\infty[$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $f \in \mathcal{L}_p$  et  $g \in \mathcal{L}_q$ . Alors  $fg \in \mathcal{L}_1$  et

[G-K]  
p. 209

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

*Remarque 30.* C'est encore vrai pour  $q = +\infty$  en convenant que  $\frac{1}{+\infty} = 0$ .

**Application 31.** Dans un espace de mesure finie,

$$1 \leq p < q \leq +\infty \implies L_q \subseteq L_p$$

**Théorème 32** (Inégalité de Minkowski).

$$\forall f, g \in \mathcal{L}_p, \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

### III - Convexité et optimisation

#### 1. Pour les fonctions convexes

Soit  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervalle réel non réduit à un point.

[ROM19]  
p. 234

**Proposition 33.** Une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est constante si et seulement si elle est convexe et majorée.

**Contre-exemple 34.** La fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $f(x) = \frac{1}{1+x}$  est convexe, majorée, mais non constante.

**Proposition 35.** Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe et est dérivable en un point  $\alpha \in \overset{\circ}{I}$  tel que  $f'(\alpha) = 0$ , alors  $f$  admet un minimum global en  $\alpha$ .

**Proposition 36.** Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe et admet un minimum local, alors ce minimum est global.

#### 2. Dans un espace de Hilbert

Pour toute la suite, on fixe  $H$  un espace de Hilbert de norme  $\|\cdot\|$  et on note  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire associé.

[LJ]  
p. 32

**Lemme 37** (Identité du parallélogramme).

$$\forall x, y \in H, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

et cette identité caractérise les normes issues d'un produit scalaire.

**Théorème 38** (Projection sur un convexe fermé). Soit  $C \subseteq H$  un convexe fermé non-vide.

[DEV]

Alors :

$$\forall x \in H, \exists ! y \in C \text{ tel que } d(x, C) = \inf_{z \in C} \|x - z\| = d(x, y)$$

On peut donc noter  $y = P_C(x)$ , le **projeté orthogonal de  $x$  sur  $C$** . Il s'agit de l'unique point de  $C$  vérifiant

$$\forall z \in C, \langle x - P_C(x), z - P_C(x) \rangle \leq 0$$

**Théorème 39.** Si  $F$  est un sous espace vectoriel fermé dans  $H$ , alors  $P_F$  est une application linéaire continue. De plus, pour tout  $x \in H$ ,  $P_F(x)$  est l'unique point  $y \in F$  tel que  $x - y \in F^\perp$ .

**Théorème 40.** Si  $F$  est un sous espace vectoriel fermé dans  $H$ , alors

$$H = F \oplus F^\perp$$

et  $P_F$  est la projection sur  $F$  parallèlement à  $F^\perp$  : c'est la **projection orthogonale** sur  $F$ .

**Corollaire 41.** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $H$ . Alors,

$$\overline{F} = H \iff F^\perp = 0$$

**Théorème 42** (de représentation de Riesz).

$$\forall \varphi \in H', \exists ! y \in H, \text{ tel que } \forall x \in H, \varphi(x) = \langle x, y \rangle$$

et de plus,  $\|\varphi\| = \|y\|$ .

**Corollaire 43.**

$$\forall T \in H', \exists ! U \in H' \text{ tel que } \forall x, y \in H, \langle T(x), y \rangle = \langle x, U(y) \rangle$$

On note alors  $U = T^*$  : c'est l'**adjoint** de  $T$ . On a alors  $\|T\| = \|T^*\|$ .

**Application 44.** L'application

$$\varphi : \begin{array}{l} L_q \rightarrow (L_p)' \\ g \rightarrow (\varphi_g : f \mapsto \int_X f g \, d\mu) \end{array} \quad \text{où } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

est une isométrie linéaire surjective. C'est donc un isomorphisme isométrique.

# Bibliographie

## Objectif agrégation

[BMP]

Vincent BECK, Jérôme MALICK et Gabriel PEYRÉ. *Objectif agrégation*. 2<sup>e</sup> éd. H&K, 22 août 2005.

<https://objectifagregation.github.io>.

## De l'intégration aux probabilités

[G-K]

Olivier GARET et Aline KURTZMANN. *De l'intégration aux probabilités*. 2<sup>e</sup> éd. Ellipses, 28 mai 2019.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/4593-14919-de-l-integration-aux-probabilites-2e-edition-augmentee-9782340030206.html>.

## Les maths en tête

[GOU20]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Analyse*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 21 avr. 2020.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/10446-les-maths-en-tete-analyse-3e-edition-9782340038561.html>.

## Les maths en tête

[GOU21]

Xavier GOURDON. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités*. 3<sup>e</sup> éd. Ellipses, 13 juill. 2021.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/13722-25266-les-maths-en-tete-algebre-et-probabilites-3e-edition-9782340056763.html>.

## Cours d'analyse fonctionnelle

[LI]

Daniel LI. *Cours d'analyse fonctionnelle. avec 200 exercices corrigés*. Ellipses, 3 déc. 2013.

<https://www.editions-ellipses.fr/accueil/6558-cours-danalyse-fonctionnelle-avec-200-exercices-corriges-9782729883058.html>.

## Analyse réelle et complexe

[RUD]

Walter RUDIN. *Analyse réelle et complexe. Cours et exercices*. 3<sup>e</sup> éd. Dunod, 21 oct. 2020.

<https://www.dunod.com/sciences-techniques/analyse-reelle-et-complexe-cours-et-exercices-0>.

## Analyse pour l'agrégation

[Z-Q]

Claude ZUILY et Hervé QUEFFÉLEC. *Analyse pour l'agrégation. Agrégation/Master Mathématiques*. 5<sup>e</sup> éd. Dunod, 26 août 2020.

<https://www.dunod.com/prepas-concours/analyse-pour-agregation-agregationmaster-mathematiques>.